O postulado das paralelas é equivalente ao Teorema de Pitágoras

Fabio Fogliarini Brolesi

December 2022

Vamos tomar o postulado das paralelas (V postulado de Euclides) na forma do Axioma de Playfair:

I Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela á reta dada

Este axioma, ou seu equivalente, parece ser necessário para provar o teorema de Pitágoras:

II Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos

Qualquer que seja a prova do teorema de Pitágoras, ela recai em I. Assim, sabendo que II pode ser provado, temos que I $\implies$ II.

Algumas das consequências do postulado das paralelas podem ser verificadas em outros axiomas da geometria plana, e estas podem ser mostradas utilizando-se do postulado das paralelas. Neste sentido, as afirmações abaixo também podem ser encaradas como equivalentes ao postulado das paralelas:

III Em qualquer triângulo, a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos

IV Em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual a soma dos ângulos não adjacentes.

V Se duas retas paralelas são contadas por uma transversal, os ângulos alternados internos são iguais, e os ângulos correspondentes também são iguais.

Ainda é possível fazer afirmações equivalentes ao V Postulado de Euclides, mas mais fracos que as primeiras. São elas:

VI Existe algum triângulo que possui a soma de seus ângulos igual a soma de dois ângulos retos.

VII Existe um triângulo retângulo isósceles o qual possui a soma de seus ângulos igual a dois ângulos retos.

VIII Existe um triângulo retângulo isósceles arbitrariamente grande o qual a soma de seus ângulos seja igual a dois ângulos retos.

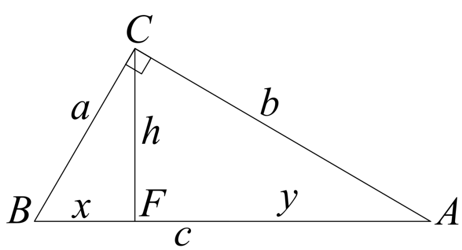
IX A soma dos três ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos.

Já mostramos que I $\implies$ II. No século XIX, Legrande estabeleceu que:

- VI $\implies$ VII
- VII $\implies$ VIII
- VIII $\implies$ IX
- IX $\implies$ I

Vamos aqui mostrar que II $\implies$ VIII.

Se em todo o triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos, então existe um triângulo isósceles arbitrariamente grande com ângulo reto e que possui a soma dos seus ângulos iguais a dois ângulos retos.



Seja ABC um triângulo retêngulo, com o ângulo $\hat{C}$ sendo o ângulo reto. Traçando-se a altura CF e tendo a, b, e c os lados opostos aos ângulos A, B e C e com $x = BF$, $y = FA$, e $h = CF$ então $\triangle BFC$ e $\triangle CFA$ assim como $\triangle BCA$ são triângulos retângulos, e sabe-se que pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$x^2 + h^2 = a^2$$

$$h^2 + y^2 = b^2$$

$$c^2 = (x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Substituindo as 3 últimas equações na primeira, temos:

$$x^2 + h^2 + h^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2y$$

ou

$$2h^2 = 2xy$$

e

$$\frac{h}{x} = \frac{y}{h}$$

Tomemos $\frac{h}{x} = \frac{y}{h} = k$. Então $h = kx$ e $y = hk$ e nós temos:
$b^2 = h^2 + y^2 = k^2(x^2 + h^2) = k^2a^2$, então:

$$\frac{b}{a} = k = \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$$

De maneira similar, podemos mostrar que

$$\frac{b}{c} = k = \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$$

Portanto, todos os lados correspondentes dos triângulos menores são proporcionais aos lados do triângulo maior.

Podemos então concluir que uma vez que os lados dos triângulos são proporcionais os ângulos correspondentes são iguais. Esta implicação, entretanto, é uma consequência do V Postulado de Euclides. Entretanto, podemos pegar um exemplo em particular: um triângulo isósceles retângulo.

Então:
$x = y$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{h} \implies x = h \implies y = h$$

Assim, $\triangle BFC$ e $\triangle AFC$ são isósceles e os ângulos das bases $\widehat{FBC}$, $\widehat{BCF}$, $\widehat{FCA}$ e $\widehat{FAC}$ são iguais. Como $\widehat{BFC}$ e $\widehat{CFA}$ são retos, podemos concluir que $\triangle BFC$ e $\triangle CFA$ são equiângulos, e equiângulos com $\triangle BFC$ e $\triangle ABC$.

Mas $\widehat{BCF}$ e $\widehat{FCA}$ tem soma igual a um ângulo reto. Portanto $\widehat{FBC}$ e $\widehat{FAC}$ somados também resultam num ângulo reto, e a soma dos ângulos do triângulo original é igual a dois ângulos retos.$\blacksquare$