Movimentos simétricos de um polígono regular de n lados.

Fogliarino Brolesi

Campinas, Primavera de 2006

Resumo

monografia envolvendo a estrutura de grupo de movimentos simétricos de um polígono regular de n lados.

1 Polígonos regulares

Um polígono regular é aquele que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes. Existem duas circunferências associadas a um polígono regular.

1.1 Circunferência circunscrita

Em um polígono regular com n lados, podemos construir uma circunferência circunscrita (por fora), que é uma circunferência que passa em todos os vértices do polígono e que contém o polígono em seu interior.

1.2 Circunferência inscrita

Em um polígono regular com n lados, podemos colocar uma circunferência inscrita (por dentro), isto é, uma circunferência que passa tangenciando todos os lados do polígono e que está contida no polígono.

2 Elementos e propriedades de um polígono regular

2.0.1 Centro

Centro do polígono é o centro comum às circunferências inscrita e circunscrita

2.0.2 Raio da circunferência circunscrita

Raio da circunferência circunscrita é a distância do centro do polígono até um dos vértices.

2.0.3 Raio da circunferência inscrita

Raio da circunferência inscrita é o apótema do polígono, isto é, a distância do centro do polígono ao ponto médio de um dos lados.

2.0.4 Ângulo central

Ângulo central é o ângulo cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados contém vértices consecutivos do polígono.

2.0.5 Medida do ângulo central

Medida do ângulo central de um polígono com n lados é dada por $\frac{360}{n}$ graus. Por exemplo, o ângulo central de um hexágono regular mede 60^o graus e o ângulo central de um pentágono regular mede $\frac{360}{5} = 72^o$.

2.0.6 Ângulos internos

Um polígono regular de n lados tem ângulos internos de $\frac{(n-1)\cdot 180}{n}$

De modo alternativo, os ângulos internos de um polígono regular têm $\frac{(n-2)\cdot\pi}{n}$ rad (ou $\frac{n-2}{2n}$ voltas [1])

3 Primeiras observações

3.1 Grupo das simetrias de um triângulo equilátero

Seja $P_1P_2P_3$ um triângulo equilátero. Seja O o centro das circunferências inscritas e circunscritas deste triângulo. Seja $O = (0,0)$, a origem de $\mathbb{R}^2$. Chamemos de E_1, E_2 e E_3 as retas do espaço passando pelas medianas do triângulo.

As transformações que preservam o triângulo podem ser caracterizadas em dois grupos distintos:

1. Transformações planas
   - id: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo 0
   - $R_{\frac{2\pi}{3}}$: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo igual a $\frac{2\pi}{3}$
   - $R_{\frac{4\pi}{3}}$: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo igual a $\frac{4\pi}{3}$
2. Transformações espaciais
   - R_1: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação E_1
   - R_2: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação E_2
   - R_3: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação E_3

É fácil a verificação que $S_\Delta := \left\{id, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_1, R_2, R_3\right\}$ com a composição de funções é de fato um grupo.

Este grupo não é abeliano.

3.2 Grupo das simetrias de um quadrado

Seja $P_!1P_2P_3P_4$ um quadrado. Seja O o centro das circunferências inscritas e circunscritas deste quadrado. Seja $O = (0,0)$, a origem de $\mathbb{R}^2$. Chamemos D_1, D_2, M e N as retas do espaço determinads pelas diagonasi e mediatrizes do quadrado.

As transformações que preservam o quadrado podem ser caracterizadas em dois grupos distintos:

1. Transformações planas

[1] Uma volta equivale a 360°

- *id*: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo 0
- $R_{\frac{\pi}{2}}$: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo igual a $\frac{\pi}{2}$
- R_{π}: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo igual a π
- $R_{\frac{3\pi}{2}}$: rotação *plana* centrada em $(0,0)$ no sentido anti-horário de ângulo igual a $\frac{3\pi}{2}$

2. Transformações espaciais

- R_1: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação D_1
- R_2: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação D_2
- R_M: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação M
- R_N: rotação *espacial* de ângulo π com eixo de rotação N

É fácil a verificação que $S_{quadrado} := \left\{ id, R_{\frac{\pi}{2}}, R_{\pi} R_{\frac{3\pi}{2}}, D_1, D_2, M, N \right\}$ com a composição de funções é de fato um grupo.

Este grupo não é abeliano.

4 Generalizações

4.1 Polígono de $2n$ lados, $n \in \mathbb{N}$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e um P_{2n} polígono com $2n$ lados. Sejam também D_1, D_2, ..., D_n as diagonais deste polígono.

Sejam ainda M_1, M_2, ..., M_n as retas que passam pelos pontos médios de cada segmento que forma os lados do polígono.

Seja O o centro das circunferências inscritas e circunscritas deste polígono. Seja $O = (0,0)$, a origem de $\mathbb{R}^2$.

A partir destas hipóteses, temos que a rotação *plana* de $(\frac{\pi}{n})$ (rotação em torno do centro O) preserva tal polígono. Dessa forma, qualquer rotação de $k(\frac{\pi}{n})$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k < 2n$ preservam o polígono.

Analisando a rotação espacial, podemos verificar que cada uma das retas que passa pelos vértices opostos do polígono e pelos pontos médios dos segmentos opsotos, são eixos para uma rotação *espacial*. Neste caso, temos n retas que passam pelos vértices $((\frac{2n}{2})$, pois cada reta passa por 2 vértices), e n retas que passam pelos segmentos que formam o polígono $((\frac{2n}{2})$, pois cada reta passa por 2 segmentos).

Assim, temos:

$$S_{poligono} = \left\{ D_1, D_2, D_3, \ldots, D_n, M_1, M_2, M_3, \ldots, R_{\frac{\pi}{n}}, R_{2\frac{\pi}{n}}, R_{3\frac{\pi}{n}}, \ldots, R_{(2n-1)\frac{\pi}{n}} \right\}$$

Estas são todas as transformações que preservam o polígono.

Vale lembrar que este grupo não é abeliano...

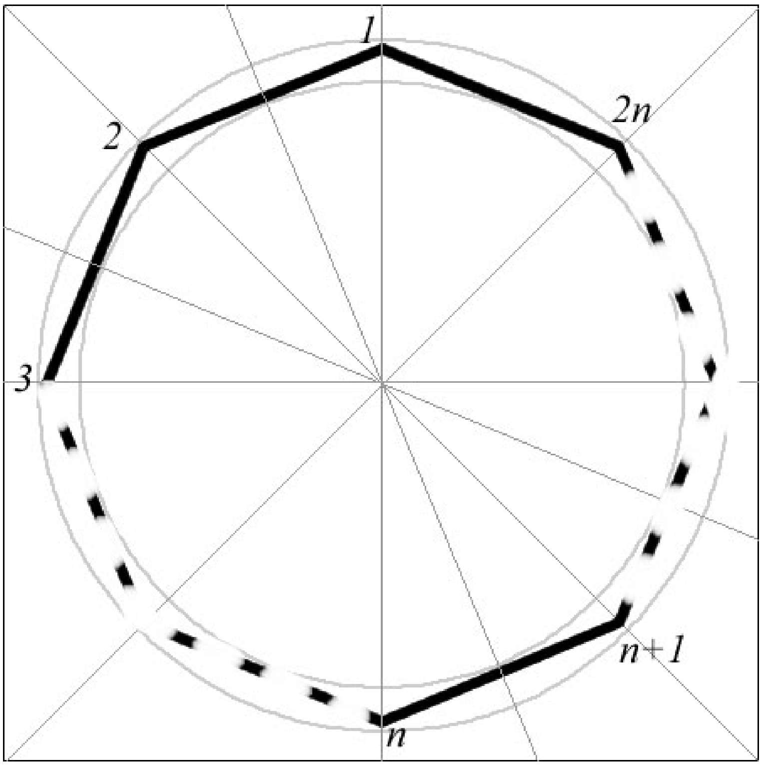

Figura 1: Polígono de 2n lados

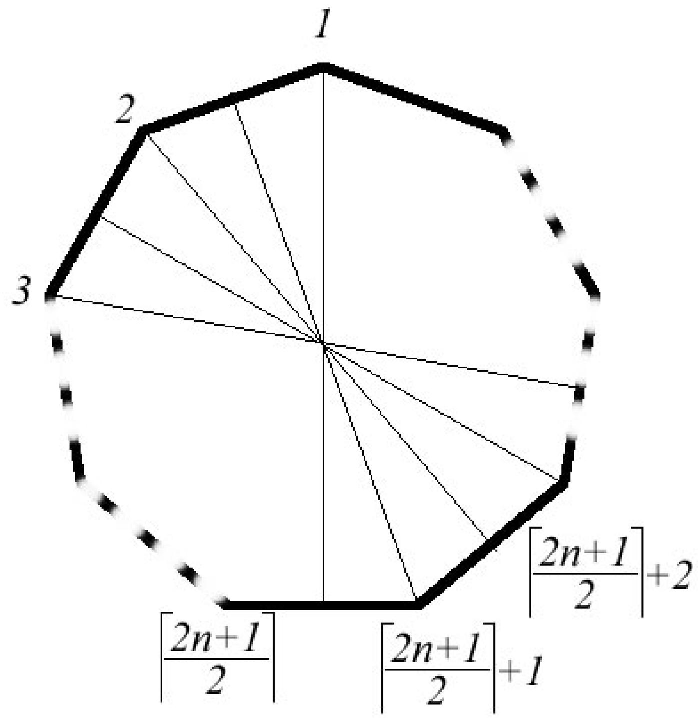

Figura 2: Polígono de 2n+1 lados

4.2 Polígono de $2n + 1$ lados, $n \in \mathbb{N}$

Seja $n \in \mathbb{N}$ e um P_{2n+1} polígono com $2n + 1$ lados. Sejam também D_1, D_2, ..., D_{2n+1} as retas que partem de um vértice e que são a mediana do lado oposto a este vértice do polígono.