O Postulado das Paralelas é equivalente ao Teorema de Pitágoras.

Fábio Fagliarim Broleri
RA 023718

Vamos tomar o postulado das paralelas (V Postulado de Euclides) na forma do Axioma de Playfair

I) Por um ponto fora de uma reta não se pode traçar mais que uma reta paralela à reta dada.

Este axioma, ou seu equivalente, parece ser necessário para provar o Teorema de Pitágoras:

II) Num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Qualquer que seja a prova do Teorema de Pitágoras, ela recai em I. Assim, sabendo que II pode ser provado, temos que I → II.

Algumas das consequências do postulado das paralelas podem ser verificados em
outros axiomas de geometria plana, e estas podem ser mostradas utilizando-se
do postulado das paralelas. Neste sentido, as afirmações abaixo também podem
ser encarados como equivalentes ao postulado das paralelas:

III) Em qualquer triângulo, a soma dos três ângulos é igual a dois ângulos retos

IV) Em qualquer triângulo, cada ângulo externo é igual a soma dos ângulos não adjacentes.

V) Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, os ângulos alternos internos são iguais, e os ângulos correspondentes também são iguais.

Ainda é possível fazer afirmações equivalentes ao V Postulado de Euclides, mas mais fracos que as primeiras. São elas:

VI) Existe algum triângulo que possui a soma de seus ângulos igual a soma de dois ângulos retos

VII) Existe um triângulo retângulo isósceles o qual possui a soma de seus ângulos seja igual a dois ângulos retos.

VIII) Existe um triângulo retângulo isósceles arbitrariamente grande o qual a soma de seus ângulos seja igual a dois ângulos retos

IX) A soma dos três ângulos de um triângulo retângulo é igual a dois ângulos retos

Já mostramos que I implica II. No século XIX Legendre estabeleceu que:

- VI ⇒ VII
- VII ⇒ VIII
- VIII ⇒ IX
- IX ⇒ I.

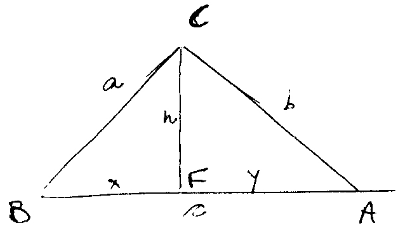
Vamos aqui mostrar que II ⇒ VIII

Se, em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, então existe um triângulo isósceles arbitrariamente grande com um ângulo reto e que possui a soma de seus ângulos igual a dois ângulos retos.

De fato, vamos provar algo mais forte:

Se, em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos, então a soma dos ~~três~~ ângulos de um triângulo retângulo isósceles é igual a soma de dois ângulos retos.

Seja ABC um triângulo retângulo, com o ângulo $\hat{C}$ sendo o ângulo reto. Traçando-se a altura CF e tendo a, b e c os lados opostos aos vértices A, B e C e com $x = BF$, $y = FA$ e $h = CF$, então



ΔBFC e ΔCFA, assim como ΔBCA são triângulos retângulos, e vale o teorema de Pitágoras:

$$a^2+b^2=c^2$$
$$x^2+h^2=a^2$$
$$h^2+y^2=b^2$$

$$c^2=(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$$

Substituindo as 3 últimas equações na primeira temos:

$$x^2+h^2+h^2+y^2=x^2+y^2+2xy \text{ ou}$$

$$2h^2=2xy, \text{ e}$$

$$\frac{h}{x}=\frac{y}{h}$$

Tomemos $\frac{h}{x}=\frac{y}{h}=k$. Então, $h=kx$, $y=hk$, e nós temos:

$$b^2=h^2+y^2=k^2(x^2+h^2)=k^2a^2, \text{ então:}$$

$$\frac{b}{a}=k=\frac{h}{x}=\frac{y}{h}.$$

De maneira similar podemos mostrar que

$$\frac{b}{c} = k = \frac{h}{x} = \frac{y}{h}$$

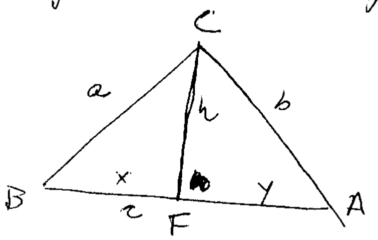
Portanto, lados correspondentes dos triangulos menores são proporcionais aos lados do triangulo maior.

Podemos então concluir que uma vez que os lados dos triangulos são proporcionais os angulos correspondentes são iguais. Esta implicação, entretanto, é uma consequencia do V Postulado de Euclides. Entretanto, podemos pegar um exemplo em particular: um triangulo isosceles retangulo.

Então:

$x = y$

$\frac{a}{b} = \frac{x}{h} \Rightarrow x = h \Rightarrow y = h.$



Assim ΔBFC e ΔAFC são isosceles e os angulos das bases $\widehat{FBC}$, $\widehat{BCF}$, $\widehat{FCA}$ e $\widehat{FAC}$ são iguais. Como $\widehat{BFC}$ e $\widehat{CFA}$ são retos, podemos concluir que ΔBFC e ΔCFA são equiângulos, e equiângulos com ΔABC.

Mas $\widehat{BCF}$ e $\widehat{FCA}$ tem soma igual a um angulo reto. Portanto, $\widehat{FBC}$ e $\widehat{FAC}$ somados também resultam num angulo reto, e a soma dos angulos do triangulo original é igual a dois angulos retos. ■