EL442 A – Fundamentos da Metodologia do Ensino da Matemática II

Profº. Antonio Miguel

Logaritmos

Carlos Eduardo Ferreira	RA: 992693
Fábio Fogliarini Brolesi	RA: 023718
Guilherme Menezes	RA: 016225
Márcia Mayumi	RA: 034449

UNICAMP

Universidade Estadual De Campinas

2006

Logaritmos

"Logaritmos são os termos de uma progressão por diferença (PA) cujo primeiro termo é zero, correspondentes aos de outra progressão por quociente (PG), cujo primeiro termo é a unidade."

Sumário

Memórias estudantis

Carlos Eduardo Ferreira

Não me lembro de nenhuma situação não escolar relacionada ao tema logaritmos. Esse é o motivo pelo qual escolhi esse tema: tentar dar exemplos e utilizar logaritmos em situações práticas do dia-a-dia, não só em pesquisa ou no âmbito acadêmico.

Na escola o tema logaritmo foi apresentado de forma superficial sem nenhum exemplo prático de utilização, somente com o propósito de complementação do currículo escolar. Foi apresentado no próprio livro didático adotado e o professor não soube expandir o tema além do exposto no livro. Lembro-me que inicialmente todos os alunos tiveram dificuldades, mas logo se aprendeu a realizar os cálculos mecanicamente. Não entendíamos o significado da palavra log dos dois lados da equação e para muitos foi mais uma incógnita para dificultar nossas vidas, pois muitos queriam fazer as contas com a própria palavra log, achando que o conjunto de letras era uma incógnita.

Os exercícios eram sempre cálculos com as propriedades dos logaritmos, como mudança de base, por exemplo, mas sem conexão nenhuma com um problema real.

Mais tarde reaparece no currículo pré-vestibular. Neste período devido à necessidade de entendimento do tema para o vestibular começo a compreender melhor o significado, mas novamente o tema foi exposto de forma rápida e com muitos exercícios nas apostilas sem fim, que chamávamos “os intocáveis”.Eram milhões de exercícios para se fazer.

E, recentemente, o tema surge na universidade, e não é um tema principal de nenhuma disciplina. Aqui a situação piorou, pois já se exigia domínio total para resolução de outros problemas ainda piores. Logo quando me deparei com problemas muito mais difíceis, aprendi o conteúdo, obrigatoriamente.

Mas na universidade o tema foi estudado de forma mais abrangente, como em crescimento populacional na Biomatemática, por exemplo.

Fábio Fogliarini Brolesi

Eu tomei contato com logaritmo no 1° colegial (1999) na Escola Técnica Estadual Conselheiro Antônio Prado (ETECAP) em Campinas. Lembro-me de que meus colegas – que estudavam em outras escolas – me disseram que era uma parte muito difícil da Matemática. Quando comecei a ver o assunto, fiquei realmente assustado. O professor disse que as operações (+, -, ×, ÷) tinham únicas inversas (isso eu já sabia, pois até a 8ª série eu tive que fazer muitas "provas reais"), mas a potenciação não tinha 1 mas 2 inversas: a raticiação e o logaritmo. Eu fiquei muito curioso com o fato, mas nunca procurei a fundo a respeito do assunto.

O fato de o log ter algumas propriedades "estranhas" (a base deveria ser positiva, ≠ 1, o argumento deveria ser positivo, log 10^n = n e outras coisas como log a $^{\log b}$ = b, ou coisa parecida me puseram um certo bloqueio com a matéria.

Quando aprendi o natural neperiano (e) foi então que a coisa ficou pior, como um número que não tinha fim era natural? Para mim o natural era ser 10, pois usamos a base decimal!

Uma lembrança boa que eu tenho foi a introdução histórica da matéria, o log foi usado muito por astrônomos, para ver o posicionamento de estrelas (não sei se de fato é verdade) e já também usado réguas de cálculo (o professor levou uma) e quanto maior, mais precisa ele era. Ele também levou um livro com vários logs de números.

Guilherme G. Menezes

O meu primeiro contato com os logaritmos foi no primeiro ano do Ensino Médio em que estudei em Osasco. Lembro-me que o tema foi apresentado meramente expositivo e que, por isso, poucos alunos prestavam atenção. Como eu costumava ser um aluno extremamente tímido, prestava atenção em todos os detalhes da aula e ficava comparando esse novo professor com o professor da oitava série. Talvez seja por isso que, mesmo tendo muitas dificuldades, conseguia tirar boas notas em matemática. Não julgo a metodologia do professor como mais correta ou não, mas para muitos, ela funcionou. Muitos consideravam o tema logaritmos inútil e, como o professor não mostrava uma utilidade prática, houve um total desinteresse sobre o assunto.

Lembro-me que o professor do primeiro ano do ensino médio era totalmente o oposto do professor da oitava série, pois apesar da apresentação expositiva ele tentava "chamar a atenção" dos alunos em relação ao tema e dava oportunidades aos mesmos de se manifestarem. Apenas os realmente interessados faziam perguntas, o que era impossível de acontecer durante a aula do professor da oitava série. Durante a oitava série, lembro-me que todos deviam permanecer sentados e calados. Qualquer interferência era motivo de repreensão e até advertência escrita para os alunos. Muito diferente do que ocorreu durante o primeiro ano: a aula era muito mais "tranqüila" e interessante de se assistir, o professor fazia piadinhas e mostrava para os alunos que o tema não era um bicho de sete cabeças. Com isso, além do respeito ganhou também muitos alunos interessados na matemática, além de amigos, que até hoje o encontram na escola. Soube que atualmente ambos continuam lecionando na mesma escola, mas o professor da oitava série mudou totalmente, sendo mais compreensivo com seus alunos.

Márcia Nakamura

Meu primeiro contato com os logaritmos foi em um curso especializado de matemática, o Kumon. Não consigo lembrar exatamente com que idade fui apresentada ao Log, mas com certeza era algo bem diferente do que já havia visto até então.

O método Kumon consiste em blocos de exercícios sucessivos com uma pequena teoria descrita no início da folha e com alguns exemplos, ou seja, era um aprendizado totalmente mecânico. Os exercícios eram repetidos e ao longo do "aprendizado"(o que era analisado pelo número de acertos dos exercícios), o nível dos exercícios iam aumentando até aprendermos toda a parte técnica de logaritmos.

Com isso, quando na escola foi dada a matéria, para mim, já não assustava tanto quando assustou o restante da sala. Acredito que ter aquelas "letrinhas" LOG como algo a ser calculado gerou uma certa confusão na cabeça de muitos alunos. Mesmo tendo um bom professor, um bom material (apostilas do Sistema Didático Etapa com apostilas teóricas, apostilas de exercícios, aulas, plantões de dúvidas; o fato de Log não ser uma simples incógnita ou um número "bloqueou" alguns alunos a entenderem o significado de Log. Principalmente porque na primeira aula, logaritmo ou qualquer outra matéria é apresentada de maneira generalizada, com letras ao invés de números, teórico mesmo. A partir do momento m que o professor colocou números ao invés de letras, uma parte da sala passou a "entender" bem melhor e "decorar" a definição de Log.

Como eu já havia feito centenas de exercícios no Kumon não tive dificuldades de compreender que o professor falava e acompanhar os exercícios mais longos, ou ainda, construção do gráfico de Log. A única "surpresa" que tive foi quando vi o "Ln", que logo me foi esclarecido que nada mais era do que Log na base e.

Eu me lembro que os primeiros exercícios de Log eram simples, a classe até resolvia, mas a partir das propriedades, ocorriam maiores dificuldades para cálculos ou ainda aplicar Log para se resolver alguma equação mais complicada era praticamente impossível. A sala via Logaritmo como algo isolado e até inútil. O professor sempre tentava trazer problemas, e não exercícios isolados, que aplicasse Log, mas nem sempre a turma conseguia acompanhar a linha de raciocínio.

Questões Orientadas

1)Como apresentar o tema Logaritmos de uma forma prática?

2)Onde o logaritmo é aplicado?

3)Como surgiu o logaritmo?

4)Qual a origem da palavra Log?

5)A partir de que momento podemos apresentar Log?

6)Qual a necessidade de se introduzir Ln?

7)Por que não podemos ter Log de um número negativo?

8)Como foram calculadas as tábuas logarítmicas?

9)Como convencer os alunos a aprenderem logaritmos?

10)Quais as evidências de que um aluno assimilou o conteúdo?

11)Quais as vantagens e desvantagens de aplicar exercícios em excesso?

Atividades Propostas

ATIVIDADE 7

No século XVI, além da prática social da astronomia, a prática social financeira também contribuiu para a construção da idéia de logaritmo. Nessa época, antes de surgirem os logaritmos, já era difundida a prática de se fazer empréstimos a juros. Imagine uma pessoa, naquela época, que tenha emprestado uma quantia equivalente a R$ 1257,00 a juros compostos a 12% ao ano.

a)Quanto deveria receber essa pessoa caso a duração do empréstimo fosse 1, 2 ou t anos?

b)Quanto receberia essa pessoa caso a duração do empréstimo fosse de 2 anos e 197 dias?

c)A que tipos de expedientes recorriam as pessoas daquele século para se resolver um tal tipo de problema, quando não se dispunha nem de calculadoras, nem da teoria dos logaritmos constituída e, nem mesmo, de acesso a algoritmos para a realização das quatro operações tal como hoje os conhecemos

(Atividade baseada em IMENES, L.M.P., TROTTA, F.; JAKUBOVIC, J. Matemática Aplicada, vol. 1, p. 221-222).

Resolução da atividade 7:

a)R$ 1257,00

Taxa de 12% ao ano.

- 1 ano: R$ 1257,00 × (1,12) = R$ 1407,84
- 2 anos: R$ 1257,00 × $(1,12)^2$ = R$ 1576,78
- t anos: R$ 1257,00 × $(1,12)^t$

b)2 anos e 197 dias:

$$\text{R\$ } 1257{,}00 \times (1{,}12)^{2+\frac{197}{360}} = \text{R\$ } 1257{,}00 \times 1{,}12^2 \times 1{,}12^{\frac{197}{360}} = \text{R\$ } 1576{,}78 \times \sqrt[360]{1{,}12^{197}}$$

Aplicando log ao montante:

$$\log(1{,}257 \times 10^3) + \log(1{,}12^2) + \log(1{,}12^{\frac{197}{360}}) =$$

$$\log(1{,}257) + \log(10^3) + 2\log(1{,}12) + \frac{197}{360}\log(1{,}12) =$$

$$\log(1{,}257) + 3\log(10) + 2\log(1{,}12) + \frac{197}{360}\log(1{,}12) =$$

$$\log(1{,}257) + 3 + 2\log(1{,}12) + \frac{197}{360}\log(1{,}12)$$

c)Para resolver os problemas, as pessoas do século XVI utilizavam tabelas e tinham de fazer longos e laboriosos cálculos aritméticos. Por isso, foi necessário obter novos métodos que permitissem efetuar multiplicações e radiciações de maneira mais rápida e simples.

ATIVIDADE 8

As operações aritméticas chegaram a ser classificadas, até uma determinada época, segundo seu grau de dificuldade, em três espécies:

1. As de primeira espécie: adição e subtração;
2. As de segunda espécie: multiplicação e divisão;
3. As de terceira espécie: potenciação e radiciação.

Antes do surgimento dos logaritmos, para se resolver problemas semelhantes ao da atividade anterior, procurava-se um processo que permitisse reduzir cada operação de segunda ou terceira espécie a uma de espécie inferior e, portanto, mais simples. Alguns expedientes utilizados para se obter o produto de dois números baseavam-se em conhecimentos algébricos ou trigonométricos acompanhados do uso de tábuas trigonométricas e outras como a tábua do quadrado da metade de um número. Recorria-se, por exemplo, a identidades algébricas ou trigonométricas tais como:

a)Utilizando a primeira identidade, mostre como naquela época podia ser efetuada a seguinte multiplicação: 0,8988 × 0,9455.

b)Com auxílio da Tabela 1 e utilizando a segunda identidade, mostre como naquela época podia ser efetuada a seguinte multiplicação: 1525 × 321.

c)Com o auxílio da Tabela 2 e utilizando a terceira identidade, mostre como se efetuaria o cálculo de raiz sétima de

d) (***)

e) (***)

Tabela 1

N	$(N/2)^2$	N	$(N/2)^2$
1200	360000	1845	851006,25
1201	360600,25	1846	851929
1202	361201	1847	852852,25
1203	361802,25	1848	853776
1204	362404	1849	854700,25

Tabela 2

$N = 10^m$	M	$N = 10^m$	M
60,8	1,78390	125,7	2,09934
60,9	1,78462	125,8	2,09968
61,0	1,78533	125,9	2,10003
61,1	1,78604	126,0	2,10037
61,2	1,78675	126,1	2,10072
...	...	...	...
105,0	2,02119	7691	3,88598
105,1	2,02160	7692	3,88598
105,2	2,02202	7693	3,88610
105,3	2,02243	7694	3,88615

(Atividade baseada em IMENES, L.M.P., TROTTA, F.; JAKUBOVIC, J. Matemática Aplicada, vol. 1, p. 222-223).

d)Dê um exemplo de problema associado às práticas náutico-astronômicas européias dos séculos que antecederam o surgimento da teoria dos logaritmos, cuja solução envolvia a realização de operações aritméticas na época consideradas de segunda espécie. Caracterize a operação envolvida e resolva-a através do uso de uma das fórmulas de prostaférese. Explique o significado da palavra prostaférese e diga que tipo de conexão poderia ser estabelecida entre tal expediente metodológico e a teoria de logaritmos.

e)Faça uma busca em programas curriculares oficiais e livros didáticos antigos a fim de verificar se e como o tópico fórmulas de prostaférese neles aparecia e que objetivos tal tópico procura contemplar. Nos programas e livros didáticos de matemática da atualidade tal tópico não se acha incluído. Você acha que, de fato, ele se tornou supérfluo e obsoleto. Justifique sua resposta.

f)Analise agora as atividades 7 e 8 acima propostas sob o ponto de vista didático. Um professor que decidisse utilizá-las, não como um problema de fixação de idéias já trabalhadas, mas como introdutória de novos tópicos matemáticos, que propósitos poderia ter ele em mente e como deveria ele conduzir sua aula para atingir tais propósitos? A atividade estaria bem elaborada para que tais propósitos pudessem ser atingidos ou precisaria ser re-elaborada? Como? A atividade contém imprecisões matemáticas ou de outra natureza na sua redação? Quais? Ela seria acessível para alunos que cursam o ensino médio? Justifique. Você acha que a atividade, do modo como proposta, poderia contribuir para fazer com que a história participasse, de forma orgânica, dos processos escolares de transmissão e apropriação da matemática, bem como para se estabelecer conexões entre tópicos aparentemente desconectados do currículo de matemática e conexões entre a matemática e outros domínios do saber? Justifique. Você acha que a atividade, do modo como está proposta, é artificial? Você acha que os métodos de resolução da atividade são artificiais, pelo fato de distorcerem ou desconsiderarem a realidade? Comente e justifique suas respostas.

Resolução da atividade 8:

a)$0{,}8988 \times 0{,}9455$

Utilizando a identidade $\cos(x) \times \cos(y) = ½\,[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

$0{,}8988 = \cos(26°)$
$0{,}9455 = \cos(19°)$

$\cos(26°) * \cos(19°) =$
$½\,[\cos(26° + 19°) + \cos(26° - 19°)] =$
$½\,[\cos(45°) + \cos(7°)] =$
$½\,[0{,}7071 + 0{,}9925] =$
$½\,[1{,}6996] = 0{,}8498$

b)1525×321

Utilizando a identidade: $x \times y = [(x + y) \div 2]^2 – [(x - y) \div 2]^2$
$1525 \times 321 = [(1525 + 321) \div 2]^2 – [(1525 - 321) \div 2]^2 =$
$(1846 \div 2)^2 – (1024 \div 2)^2 = 851929 – 362404 = 489525$

c)

$60{,}8 = 10^{1,78390}$;
$126 = 10^{2,10072}$;
$7691 = 10^{3,88598}$;
$105 = 10^{2,02243}$;
Então:

$$\sqrt[7]{\frac{10^{1,78390} \times 10^{2,10072} \times 10^{3,88598}}{10^{2,02243}}} = \sqrt[7]{10^{1,78390+2,10072+3,88598-2,02243}} = 10^{\frac{14,15105}{7}} = 10^{2,02158} = 105{,}1$$

Neste exercício é notório que transformamos cálculos complexos em cálculos mais simples como somas, subtrações, divisões simples, além de obter auxílio de tabelas.

ATIVIDADE 9

No livro Aritmética Progressiva de Antônio Trajano, de1944, 75ª Edição, página 237, encontra-se a seguinte definição de logaritmo:

"Logaritmos são os termos de uma progressão por diferença (PA) cujo primeiro termo é zero, correspondentes aos de outra progressão por quociente (PG), cujo primeiro termo é a unidade".

a)Construa uma PA e uma PG que satisfaçam as condições da definição acima.

b)De acordo com a definição dada, diga qual é o logaritmo do quinto termo da PG criada.

c)Diga em que base estão sendo calculados os logaritmos de cada um dos termos da PG que você criou e explique por que.

d)Seria correto afirmar que, de acordo com a definição acima, a base dos logaritmos dos números que se quer determinar é sempre igual à razão da PG? Em caso contrário, diga como se pode determinar essa base.

e)Decida e justifique se a definição dada é uma definição correta de logaritmo e, caso não o seja, tente ajustá-la de modo a tornar-se correta.

f)Suponha que você queira obter os logaritmos decimais de certos números naturais, utilizando a definição acima. Construa uma PA e uma PG que permita fazer isso.

g)A definição acima seria correta caso o primeiro termo da PG fosse diferente de 1? Justifique.

Resolução da atividade 9:

a) PA = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9
PG = 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32

$\log_2^1 = 0$ $\quad$ $\log_2^2 = 1$ $\quad$ $\log_2^4 = 2$ $\quad$ $\log_2^8 = 3$

A base tem que ser a razão da PG (2). E o primeiro termo da PA tem que ser 0 e o da PG (1).

Podendo ainda fazer as operações logarítmicas e conferindo a tabela:

$\log_2^1 + \log_2^2 = \log_2^{(2.1)} = \log_2^2 = 1$

b) $\log_2^{16} = 4$

c) A base em que os logaritmos estão sendo calculados é a razão da PG

$\log_a^2 = 1 \quad a^1 = 2 \quad a = 2$

$\log_a^4 = 2 \quad a^2 = 4 \quad a = 2$

Cada termo da PG é igual ao número fixo "a" elevado ao termo correspondente da PA.

d) Nem sempre a base do logaritmo é igual a razão da PG, temos esse caso por exemplo quando a razão da PA for igual a 2.

PA : 0 , 2 , 4 , 6 , 8 , 10
PG : 1 , 2 , 4 , 8 , 16, 32

$\log_b^2 = 2 \quad b^2 = 2 \quad b = \sqrt{2}$

$\log_b^4 = 4 \quad b^4 = 4 \quad b = \sqrt{2}$

e) Podemos dizer que a definição é a correta, pois mesmo ensinado através de progressões (que está contido na aritmética) a mesma nunca terá um contra-exemplo.

f) PA 1 2 3 4 5 6
PG 1 10 100 1000

g) Não seria correto se alterasse o 1º termo da PA

ATIVIDADE 10

Foi a seguinte a primeira definição de logaritmo dada pelo proprietário escocês John Napier (1550-1617): "Seja AB um segmento de reta de comprimento fixo igual a 10^7 e A'B' uma semi-reta. Suponhamos que um ponto P, partindo de A, se desloque ao longo de AB com velocidade numericamente igual à distância PB. No mesmo instante em que P parte de A, um outro ponto P' parte de A' e se desloca ao longo da semi-reta A'B' com velocidade constante igual à velocidade inicial de P. Fazendo P'1 , P'2 , ... corresponder a P1, P2, ... respectivamente, então, o logaritmo de PB é igual ao comprimento de A'P', isto é, o logaritmo de $P_1B = A'P'_1$, o logaritmo de $P_2B = A'P'_2$ e assim por diante".

a)Que relação poderia ser estabelecida entre a definição de logaritmo de Napier e a definição de Trajano dada na Atividade anterior? Justifique.
b)De acordo com a definição de Napier, qual é o logaritmo de 10^7 ?
c)Na construção dos logaritmos feita por Napier, a razão da PG era tomada como $1 - 1/10^7$. Nessas condições, determine: o logaritmo neperiano de $10^7 . (1 - 1/10^7)^3$ e o número cujo logaritmo neperiano é 100.
d)Qual é a base do sistema de logaritmos de Napier?
e)Você acha que é verdadeira a afirmação usualmente feita de que os logaritmos neperianos são os logaritmos naturais (base e) ? Justifique.
f)Você acha que a palavra 'Logaritmo' foi escolhida adequadamente por Napier para qualificar a sua invenção? Justifique.
g)Suponha que você tivesse em mãos uma tábua de logaritmos que não especificasse a base na qual eles foram calculados. Como você poderia descobri-la?
h)Compare a definição de logaritmos dada por Napier a definição usualmente dada nos livros didáticos da atualidade. Em que elas se assemelham e em que se diferenciam?
i)Analise agora as atividades 9 e 10 acima propostas sob o ponto de vista didático. Um professor que decidisse utilizá-las, não como um problema de fixação de idéias já trabalhadas, mas como introdutória de novos tópicos matemáticos, que propósitos poderia ter ele em mente e como deveria ele conduzir sua aula para atingir tais propósitos? A atividade estaria bem elaborada para que tais propósitos pudessem ser atingidos ou precisaria ser re-elaborada? Como? A atividade contém imprecisões matemáticas ou de outra natureza na sua redação? Quais? Ela seria acessível para alunos que cursam o ensino médio? Justifique. Você acha que a atividade, do modo como proposta, poderia contribuir para fazer com que a história participasse, de forma orgânica, dos processos escolares de transmissão e apropriação da matemática, bem como para se estabelecer conexões entre tópicos aparentemente desconectados do currículo de matemática e conexões entre a matemática e outros domínios do saber? Justifique. Você acha que a atividade, do modo como está proposta, é artificial? Você acha que os métodos de resolução da atividade são artificiais, pelo fato de distorcerem ou desconsiderarem a realidade? Comente e justifique suas respostas.

Colocamos aqui as tabelas de uma das bibliografias:

tabela 1

t_i	VP'	EP'	EP	VP	ECP
$t_0 = 0$	100	0	0	100	100
$t_1 = 1$	100	100	90	10	10
$t_2 = 2$	100	200	99	1	1
$t_3 = 3$	100	300	99,9	0,1	0,1
$t_4 = 4$	100	400	99,99	0,01	0,01
$t_5 = 5$	100	500	99,999	0,001	0,001

tabela 2

t_i	VP'	EP'	EP	VP	ECP
$t_0 = 0$	10^7	0	0	10^7	10^7
$t_1 = 10^{-7}$	10^7	1	$(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})$
$t_2 = 2.10^{-7}$	10^7	2	$2.(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^2$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^2$
$t_3 = 3.10^{-7}$	10^7	3	$3.(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^3$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^3$
$t_4 = 4.10^{-7}$	10^7	4	$4.(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^4$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^4$
$t_5 = 5.10^{-7}$	10^7	5	$5.(1\text{-}10^{-7})$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^5$	$10^7.(1\text{-}10^{-7})^5$

Resolução da atividade 10:

a)Há, em ambas as definições, ua relação entre P.A. e P.G. Observando as tabelas verificamos que na tabela 1, EP' cresce em P.A. enquanto VP decresce em P.G. Por exemplo.

b)Verificando na tabela temos que $log(10^7) = 0$

c)Pela tabela novamente, temos que $log(10^7 . (1 – 1/10^7)^3) = 3$

Podemos notar, pelos itens b) e c) que:

$log(10^7) = 0$ e que

$log(10^7 . (1 – 1/10^7)^3) = 3$

então, podemos generalizar dizendo que:

$log(10^7 . (1 – 1/10^7)^n) = n$

Dessa forma:

$log(10^7 . (1 – 1/10^7)^{100}) = 100$

d)Neper não cita, na sua primeira definição, que haja algum elemento na construção dos logaritmos como sendo *base*.

Na notação usual de logaritmo, temos (a partir do item b)

$\log N_b(10^7) = 0 \Rightarrow b^0 = 10^7$, e ainda mais:

$\log N_b(10^7(1 – 1/10^7)) = 1 \Rightarrow b^1 = b = 10^7(1 – 10^{-7})$

$\log N_b(10^7(1 – 1/10^7)^2) = 2 \Rightarrow b^2 = 10^7(1 – 10^{-7})^2 \Rightarrow b = 10^{7/2}(1\text{-}10^{-7})$

Observamos então que na primeira definição de logaritmo, não existe uma base na forma em que conhecemos.

e)Vimos no item d) que não existe uma base para os logaritmos nesta primeira definição. Entretanto, é possível fazer pequenos ajustes, como dividir todos os termos da P.A. e da P.G. do sistema por 10^7:

PG: $\{1, (1 – 1/10^7), (1 – 1/10^7)^2, (1 – 1/10^7)^3, (1 – 1/10^7)^4, ...\}$

PA: $\{0, 1/10^7 , 2/10^7, 3/10^7, 4/10^7, ...\}$

Para esse novo sistema construído temos:

$\log_b 1 = 0 \Rightarrow b^0 = 1$.
$\log_b (1 - 1/10^7) = 1/10^7 \Rightarrow b^{0,0000001} = (1 - 1/10^7) \Rightarrow b = (1 - 1/10^7)^{1/0,0000001} \Rightarrow$
$\Rightarrow b = (1 - 1/10^7)^{10.000.000}$
$\log_b (1 - 1/10^7)^2 = 2/10^7 \Rightarrow b^{0,0000002} = (1 - 1/10^7)^2 \Rightarrow b = (1 - 1/10^7)^{2/0,0000002} \Rightarrow$
$b = (1 - 1/10^7)^{10.000.000}$
$\log_b (1 - 1/10^7)^3 = 3/10^7 \Rightarrow b^{0,0000003} = (1 - 1/10^7)^3 \Rightarrow b = (1 - 1/10^7)^{3/0,0000003}$
$\Rightarrow b = (1 - 1/10^7)^{10.000.000}$.
Note que agora há uma base definida:$(1 - 1/10^7)^{10.000.000}$, ou seja,
$0,9999999^{10.000.000} = 0.367879$. Este número parece estranho mas ao calcularmos $1/0,9999999^{10.000.000}$ obtemos 2.71828 ou seja o chamado natural neperiano (*e*).
Ou seja, mesmo fazendo uma pequena alteração na definição de logaritmo de Napier, ainda assim a base não é o que chamamos de neperiana (*e*), mas *1/e*.
f)Sim, já que etmologicamente a palavra "logaritmo" pode ser dividida em:
logos = razões;
arithmos = número.
Dessa forma a associação das palavras nos dá "número de razões". E os logaritmos são exatamente isso. A palavra logaritmo está empregada corretamente.
g)Pela definição atual de logaritmos, $\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$, então para descobrir qual a base basta encontrar o valor de $\log_b(a) = 1$, pois da definição, $b^1 = a$
h) As duas definições de logaritmos não se assemelham muito dado que uma é construída a partir de progressões e outra, a partir de potenciação. A semelhança é que ambas são definidas a partir de entidades matemáticas já conhecidas (PA / PG / potência)
i) Acredito que a atividade deveria ser reelaborada. A forma com que os elementos são colocados no problema são demasiado complexos. Talvez a resolução pudesse ser a mesma, mas com uma forma mais fácil de enunciado. Acredito que um aluno de Ensino médio pode resolver um exercício desta natureza, utconilizando ferramentas adequadas. A história dos logaritmos é fundamental para que este assunto seja abordado no ensindo dado que a utilização dos logaritmos fez com que o cálculo de euações complexas se tornasse mais fácil, junto com a tábua de logaritmos.

ATIVIDADE 11

O inglês Henry Briggs (1561-1632), professor de geometria em Oxford, foi também uma outra pessoa que contribuiu para o desenvolvimento da teoria dos logaritmos. Em 1615 ele visitou Napier na Escócia, onde discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos. Briggs propôs o uso de potências de 10 e Napier disse que já tinha pensado nisso e concordou. A fim de evitar o uso de frações, ficou estabelecido entre os dois que log 1 = 0 e log 10^{10} = 10, o que implicava que o logaritmo de 10 deveria ser 1. Como Napier veio a falecer em 1617, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos comuns ou Briggsianos dos números naturais de 1 a 1000, calculados com precisão até a 14ª casa decimal. Para isso, utilizou um trabalhoso processo de aproximações sucessivas baseado na idéia de média geométrica. Explique como Briggs construiu sua tábua e diga como se poderia calcular o logaritmo de 2 pelo método por ele utilizado.

Resolução da atividade 11:

Sendo log 2 = x, temos $10^x = 2$. Inicialmente situaremos o número 2 entre duas potências de 10, a_1 e a_2, com expoentes inteiros e sucessivos. Neste caso $a_1 = 1$ e $a_2 = 10$ e então: $1 < 2 < 10$ isso implica $10^0 < 10^x < 10^1$, isso implica $0 < x < 1$, então $0 < \log_2 < 1$

Esquematicamente temos:

$a_1 = 1$	2	$a_2 = 10$
10^0	10^x	10^1

Já temos uma primeira aproximação para log 2, pois,

$0 < x < 1$, implica, $0 < \log 2 < 1$

Sendo a_3 a média geométrica entre a_1 e a_2 (valores situados nas extremidades do esquema anterior), teremos:

$a_3 = \sqrt{a_1 . a_2} = \sqrt{10} = 3{,}1622776$ e, por outro lado,

$a_3 = \sqrt{10^0 . 10^1} = 10^{0,5}$

Localizando o valor de a_3 na figura anterior e desprezando o trecho da mesma que não contém o número 2 , teremos:

$a_1 = 1$	2	$a_3 = 3{,}1622776$
10^0	10^x	$10^{0,5}$

Já temos uma primeira aproximação melhor, pois:

$0 < x < 0{,}5$, implica, $0 < \log 2 < 0{,}5000$

Estamos, pois, em condições de repetir as operações anteriores, tomando agora a médias geométrica de a_1 e a_3. No entanto, faremos uma pausa para notar que, se tivéssemos considerado a_3 como média aritmética de a_1 e a_2, em vez da média geométrica, obteríamos $a_3 = 5,5$ mas não teríamos propriedades suficientes para transformar $a_3 = (10^0 + 10^1)/2$ em uma potência de 10, o que nos impediria de levar o processo adiante. Retomando o cálculo de log 2, faremos $a_4 = \sqrt{a_1.a_3}$ e então:

$a_4 = \sqrt{a_1.a_3} = 1,7782793$ e, por outro lado

$a_4 = \sqrt{10^0.10^{0,5}} = 10^{0,25}$

Localizando o valor de a_4 no esquema anterior e desprezando o trecho que não contém o número 2, teremos:

$a_4 = 1,7782793$ 2 $a_3 = 3,1622776$

$10^{0,25}$ 10^x $10^{0,5}$

Já temos uma aproximação melhor, pois:

$0,25 < x < 0,5$, implica, $0,2500 < \log 2 < 0,5000$

Sendo $a_5 = \sqrt{a_4.a_3}$, temos:

$a_5 = \sqrt{a_4.a_3} = 2,3713735$ e, por outro lado,

$a_5 = \sqrt{10^{0,25}.10^{0,5}} = 10^{0,375}$

Com o auxílio de uma lente de aumento teremos:

$a_4 = 1,7782793$ 2 $a_5 = 2,3713735$

$10^{0,25}$ 10^x $10^{0,375}$

Portanto, $0,25 < x < 0,375$, implica, $0,2500 < \log 2 < 0,3750$

Sendo $a_6 = \sqrt{a_4.a_5}$, temos:

$a_6 = \sqrt{a_4.a_5} = 2,0535248$ e, por outro lado,

$a_6 = \sqrt{10^{0,25}.10^{0,375}} = 10^{0,31250}$

Com o auxílio de uma lente de aumento mais potente teremos:

Com mais quatro passagens chagaremos a:

$a_4 = 1,7782793$ 2 $a_6 = 2,0535248$

$10^{0,25}$ 10^x $10^{0,3125}$

Portanto, $0,25000 < \log 2 < 0,31250$

$A_{10} = 1,99885$ 2 $a_9 = 2,0164143$

$10^{0,30078}$ 10^x $10^{0,30469}$

Portanto, $0,30078 < \log 2 < 0,30469$

Já podemos fornecer o valor de log 2 com duas casas decimais: log 2 = 0,30

Com mais nove passagens chegaremos a:

$a_{14} = 1,9999784$ 2 $a_{19} = 2,0000134$

$10^{0,301025}$ 10^x $10^{0,301033}$

Se estivéssemos construído uma tabela de Logaritmos com 5 casas decimais, poderíamos, então escrever log 2 = 030103 (pois tanto 0,301025 como 0,301033, com aproximação de 5 casas decimais serão dados por 0,30103.

Considerando satisfatória a precisão de 5 casas decimais, daremos por encerrado o cálculo de log 2

Log 2 = 0,30103

Cumpre lembrar, no entanto, que a tabela de Briggs apresentava os Logaritmos dos números inteiros de 1 a 1000, calculados com precisão até a 14ª casa decimal.

Atividade 12

As tábuas de Napier e Briggs e as seguintes revolucionaram a arte da computação numérica. Contudo, a importância dos logaritmos no desenvolvimento histórico do Cálculo provém de uma descoberta publicada em 1647 pelo jesuíta belga Gregory St. Vicent (1584-1667), a qual mostrou uma surpreendente conexão entre a função logaritmo natural e a hipérbole retangular xy = 1. Em seu tratado *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Obra geométrica sobre a quadratura do círculo e de secções cônicas), Gregory mostrava que se ao longo do eixo-x se marcasse, a partir de x = a, pontos tais que os intervalos entre eles crescessem em PG, e se nesses pontos se levantassem ordenadas da hipérbole xy = 1, então, as áreas sob a curva interceptadas entre ordenadas sucessivas seriam iguais. Isto é, enquanto as abscissas cresciam geometricamente, a área *sob a curva* crescia aritmeticamente, ou, em termos atuais, a integral de *a* até *b* de x^{-1} seria igual ln b - ln a.

- Ao longo do eixo ***x*** marcou-se ***x=a*** pontos, num intervalo que crescia em P.G. Se nestes pontos levantasse coordenadas a partir de ***1/x***, então as áreas, interceptadas pela curva seriam iguais, ou em termos atuais, a integral de ***a*** até ***b*** de ***1/x*** seria igual a ***ln b - ln a***

  Vamos demonstrar o pensamento de Gregory St. Vicent;

Suponhamos que a P.G. seja a seguinte:

P.G. (1,2,4,8,16...) de razão ***q=2***

A P.G. representará o eixo ***x*** de nossas coordenadas cartesianas, função: ***f(x)=1/x***
As coordenadas do eixo ***y*** também formarão uma P.G. de razão ***q=1/2***

(A) ln2 – ln1=?

Gráfico

Sabemos que ln1=0, logo a área da parte (1) = ln2= 0,69

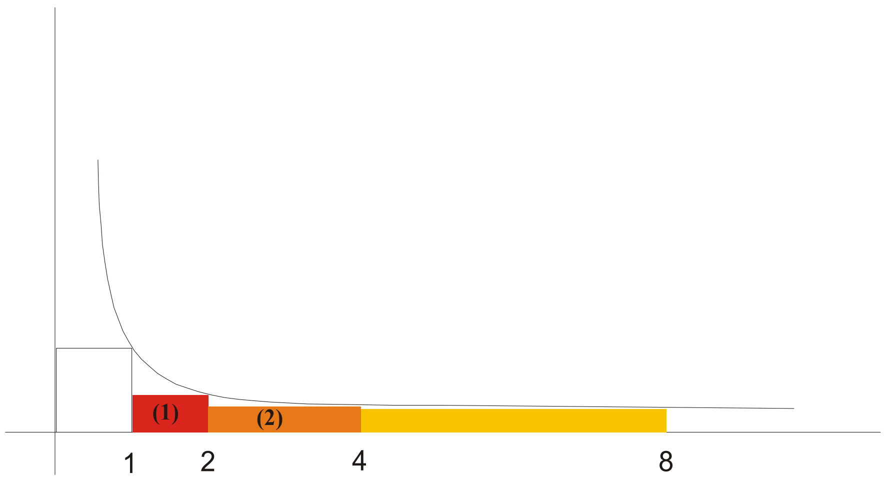
(B) ln4 – ln2=?

Resolvendo:

$\ln 4 = \ln 2^2 \rightarrow 2\ln 2 - \ln 2 = \ln 2 = 0{,}69$

Concluímos que a s áreas da curva, interceptadas pelos segmentos de reta que parte dos pontos marcados pelos termos da P.G. são sempre iguais, ou seja, formam uma P.A. onde o1° termo é igual a zero, o segundo termo = razão = ln2, neste caso, o 3°termo = 2ln2, e assim sucessivamente.

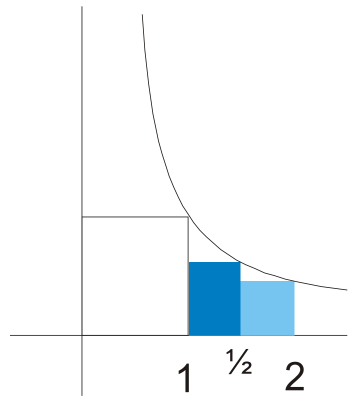
Esta é a relação que ele encontrou entre a área da hipérbole e logaritmo natural. Mas como ele concluiu que a áreas da figura era a diferença entre ln de um termo da P.G. com o ln do termo anterior?



Consideramos a mesma P.G. e a mesma função, f(x)=1/x

No gráfico, podemos definir a área da curva da seguinte maneira:

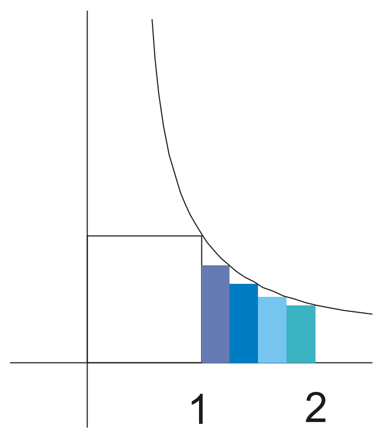
- se traçarmos, a partir do ponto 2, uma reta até sua imagem em ***f(x)***, formamos um retângulo,
- se calcularmos a área deste retângulo teremos parte da área da curva, mas ainda haverá uma grande diferença. Se fizermos uma divisão, encontrando um ponto médio entre 1 e 2, nos aproximamos mais da área da curva, se fizermos infinitas subdivisões teremos a área mais próxima possível da desejada.



Ex:

No intervalo entre 1 e 2, faremos 4 subdivisões;
$A(H^2{}_1) = 0,5$ => nenhuma subdivisão

$A(H^{3/2}{}_1) = 0,33$ $0,33+0,25 = 0,58$ } com um subdivisão
$A(H^2{}_{3/2}) = 0,25$



$A(H^2{}_{7/4}) = 0,13$
$A(H^{7/4}{}_{3/2}) = 0,14$ $\quad$ $0,13 + 0,14 + 0,17 + 0,20 = 0,64$
$A(H^{3/2}{}_{5/4}) = 0,17$
$A(H^{5/4}{}_1) = 0,20$

Com 4 subdivisões chegamos bem mais próximos do numero que queremos, no caso 0,69 que é igual a ln2.

Sabemos que ln é o logaritmo cuja base dele é sempre a mesma, o numero ***e***, mas como chegamos a este numero?

Temos nossa P.G., a mesma de razão ***q=2***
Vimos que quanto mais subdivisões fizermos mais próximos da área desejada chegamos, vamos supor que ln2=0,64, para simplificar os cálculos, não conhecemos o numero ***e***, queremos encontra-lo:

Então: $\log_x 2 = 0,64$, aplicamos a propriedade da mudança de base => $\log_{10}2/\log_{10}2 = 064$

*Recorremos a uma tabua de logaritmos e vemos que $\log_{10}2 = 0{,}3$

$$0{,}30 / 0{,}64 = \log x$$
$$\log x = 0{,}47$$
$$x = 10^{0{,}47}$$
$$x = 2{,}9$$

Chegamos a ***x = 2,9***, um numero próximo de ***e***, devido as nossas poucas subdivisões, se tivéssemos feito infinitas subdivisões até atingirmos a área como 0,69 encontraríamos o numero ***e=2,72...***

a) Qual é a área da figura delimitada pelo segmento AB, compreendido entre os pontos de abscissa 5 e 7 no eixo-x, pela faixa da hipérbole xy = 1 compreendida nesse segmento e pelos segmentos paralelos ao eixo-y, compreendidos entre a faixa da hipérbole e o segmento AB, levantados nos pontos de abscissa 5 e 7 ?

Aplicando a descoberta de Gregory, calcular a área entre o intervalo [5,7].

Seja ***y=1/x***

$$\mathbf{\ln 7 - \ln 5 = ??}$$

$$\ln 7 = 1{,}94$$
$$\ln 5 = 1{,}60$$

$$\mathbf{1{,}94 - 1{,}60 = 0{,}34}$$
$$\mathbf{\ln 7 - \ln 5 = 0{,}34}$$

Aplicando a definição de área do retângulo, temos o seguinte:
$A(H^7{}_5) = 0{,}29$, um numero próximo de 0,34, mas se fizermos uma divisão nesse intervalo, teremos:
$A(H^7{}_6) = 0{,}14$ $\quad$ $0{,}14 + 0{,}17 = 0{,}31$, e nos aproximamos mais da área real.
$A(H^6{}_5) = 0{,}17$

b) Calcule o valor da integral de 10 a 100 de x^{-1}.
Calcular a integral de 10 a 100 de 1/x

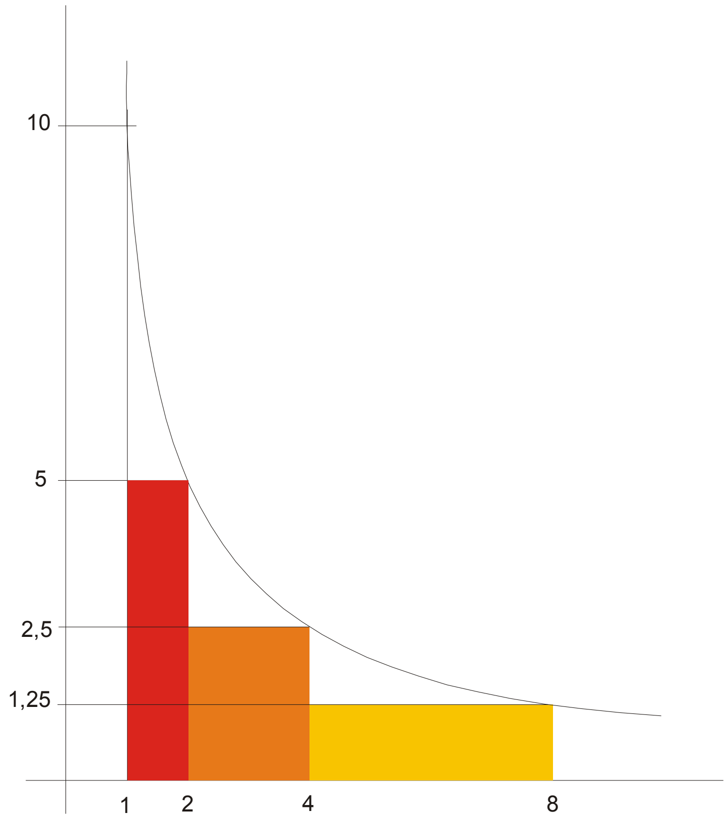
$$\ln 100 - \ln 10 = 2{,}30$$

Tiramos a seguinte conclusão, a descoberta de Gregory foi precursora do calculo diferencial integral.

c) Utilizando uma calculadora, verifique a descoberta de Gregory quando consideramos no eixo-x a PG: 1, 2, 4, 8, 16, ...Tendo em vista os resultados anteriores, utilize uma calculadora e diga qual é a razão de crescimento das áreas sob a faixa da hipérbole xy = 10, quando se toma no eixo-x os seguintes valores em PG: 1, 2, 4, 8, 16...

Mantemos nossa P.G. (1,2,4,8...) o que aconteceria de a função fosse da seguinte maneira: 10/x?

Aplicando o mesmo procedimento de calculo das áreas dos retângulos para se encontrar o valor da área da curva, notaremos que a razão das áreas será multiplicada por 10.



Temos então:

$A(H^2{}_1) = 5{,}0$

$A(H^4{}_2) = 5{,}0$

$A(H^8{}_4) = 5{,}0$

.

.

.

teremos uma P.A de razão ***r* = 5,** P.A.(0, 5, 10, 15, ...)

ATIVIDADE 13

a)Elabore um problema que envolva uma relação funcional entre duas variáveis, de modo que o gráfico dessa variação seja melhor visualizado em um papel na escala log-log.
b)Explique como se pode construir o gráfico da função relativa ao problema elaborado e interprete o resultado obtido.
c)Qual a vantagem de se usar a escala log-log em vez da escala linear usual?
d)O que aconteceria se você tivesse construído o gráfico dessa mesma função num sistema de coordenadas em que o eixo das ordenadas estivesse subdividido segundo uma escala logarítmica e o das abscissas segundo a escala linear usual?
e)Se fosse permitido apenas o uso de uma régua sem escala e de um compasso, seria possível construir numa folha de papel em branco um sistema de coordenadas em escala logarítmica? Justifique sua resposta. E se a régua fosse milimetrada?

Diga se do ponto de vista didático, você acredita ser pertinente discutir com estudantes do ensino médio, tópicos tais como "Construção geométrica de escalas logarítmicas" e "Construção de gráficos em escalas logarítmicas". Justifique.

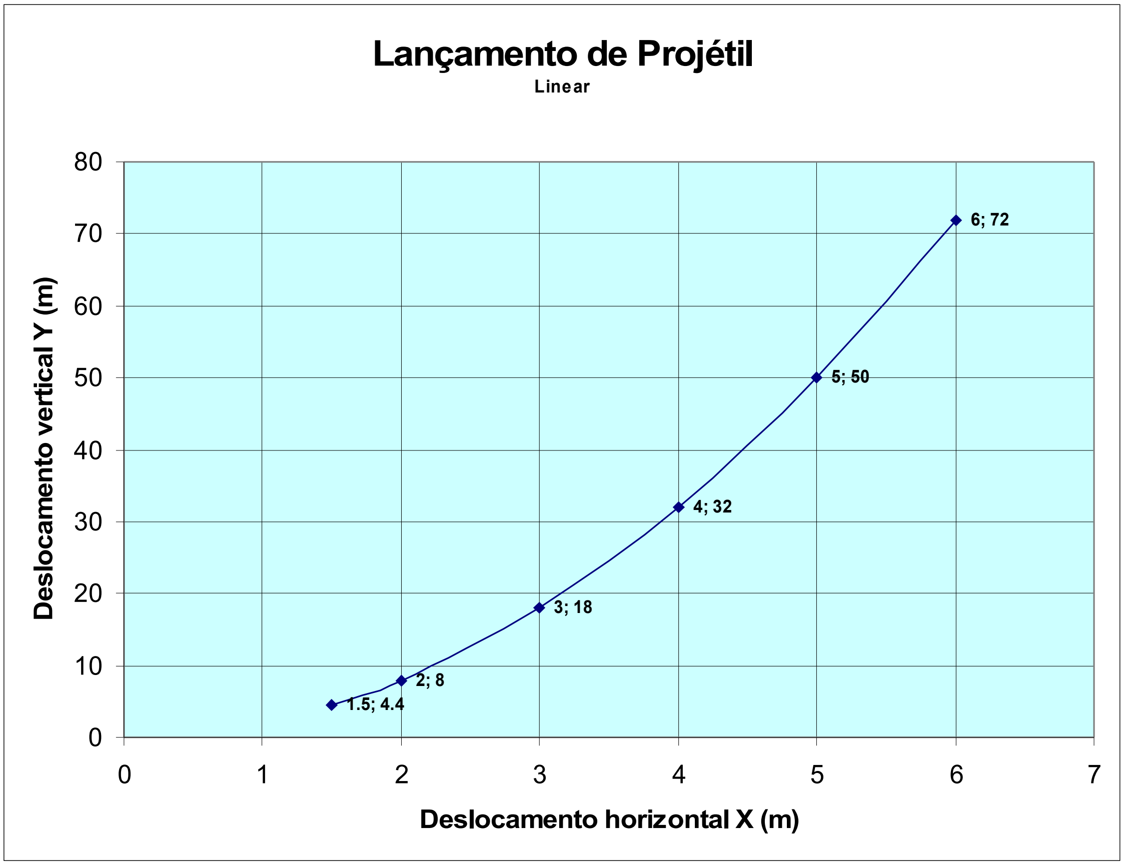
Resolução da Atividade 13:

a) Balística é a ciência que se preocupa em estudar o movimento de corpos lançados ao ar livre, o que geralmente está relacionado ao disparo de projéteis por uma arma de fogo. Numa experiência sobre o lançamento de um projétil no plano (x, y) foram registrados os dados da tabela abaixo:

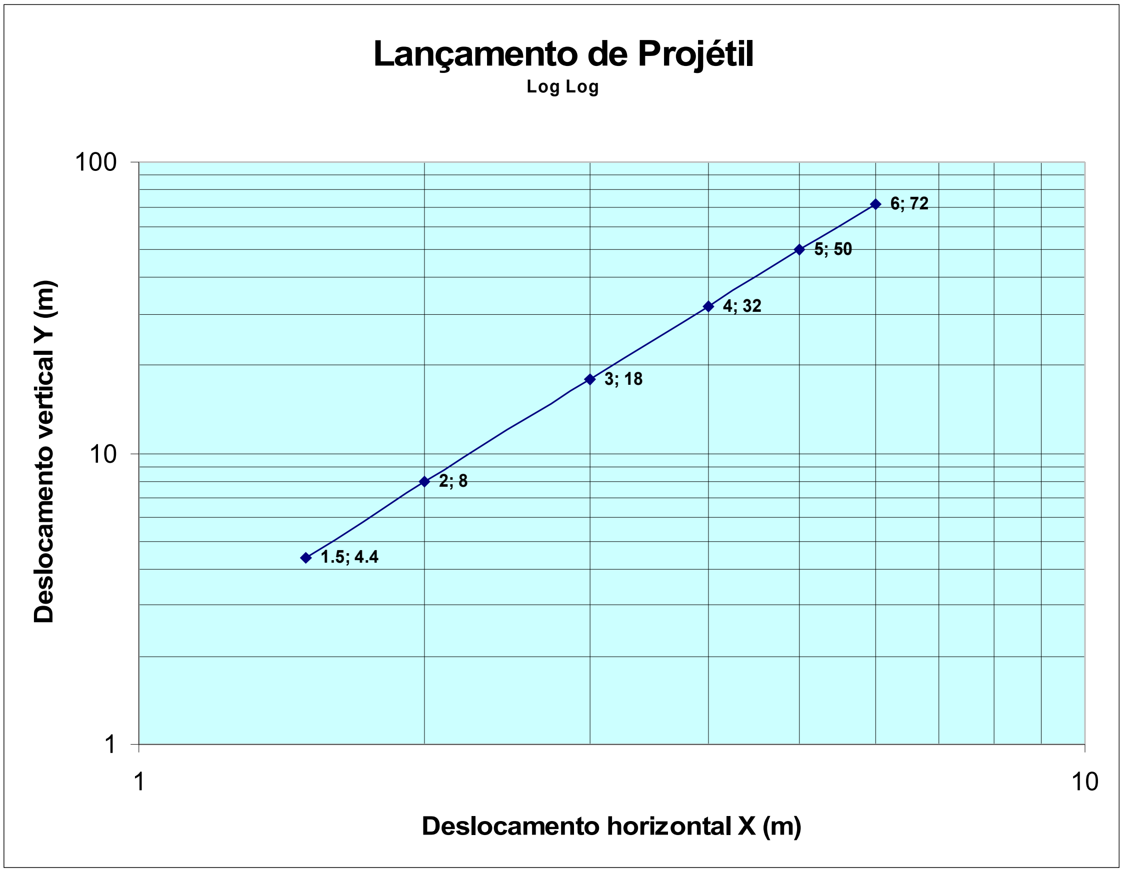
X (m)	Y (m)	Log X	Log Y
1,5	4,4	0,176091	0,643453
2	8	0,30103	0,90309
3	18	0,477121	1,255273
4	32	0,60206	1,50515
5	50	0,69897	1,69897
6	72	0,778151	1,857332

Qual a expressão que descreve o movimento do projétil no plano? A que altura do solo o projétil estará quando for percorrida a distância de 10 metros?

Para visualizarmos melhor o comportamento do projétil ao longo do movimento traçamos um gráfico no papel milimetrado utilizando os dados da tabela e obtivemos a curva apresentada abaixo:



Logo, observando o gráfico podemos inferir que a relação matemática entre as variáveis, altura percorrida (y) e deslocamento na horizontal (x), é do tipo potência: $y = kx^a$. Portanto, para poder determinar os parâmetros k e a é preciso linearizar o gráfico acima. Desta forma passamos o gráfico para o papel di-log



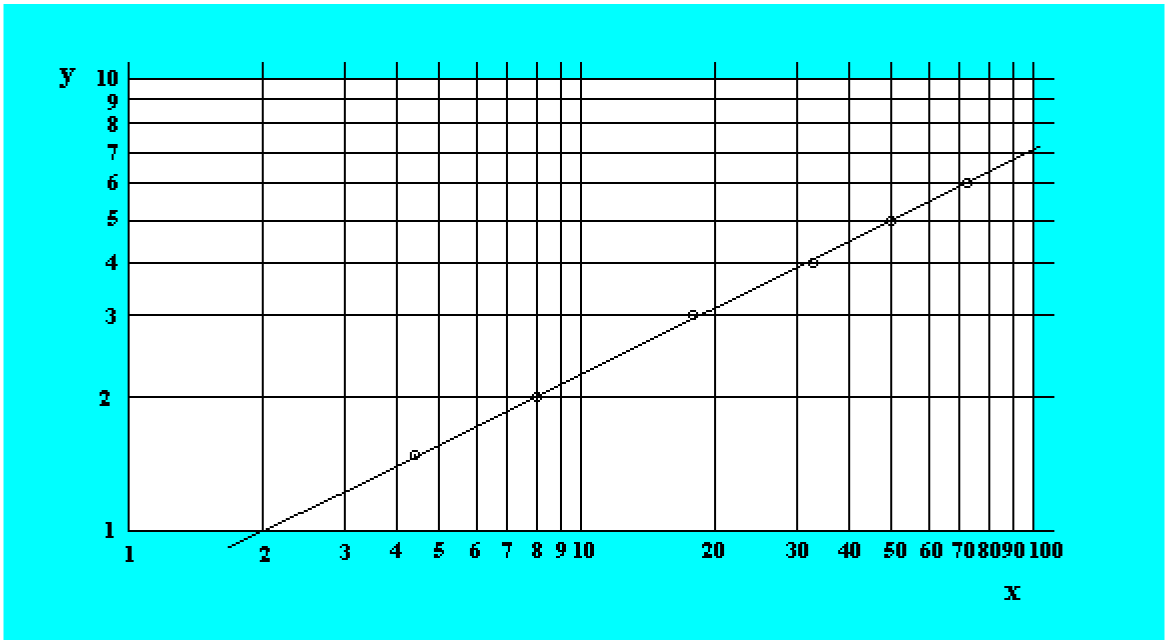
b) Para a construção do gráfico no papel di-log basta passarmos os pontos da tabela diretamente para o gráfico e a partir dele se obtém uma relação linear entre Log y e Log x.

$y = k\,x^{a}$
$\text{Log } y = \text{Log }(k\,x^{a})$
$\text{Log } y = \text{Log } k + \text{Log } x^{a}$
$\text{Log } y = \text{Log } k + a \text{ Log } x$

Para obter k (coeficiente linear) diretamente do gráfico, por extrapolação, basta prolongar a reta até que esta cruze o eixo das ordenadas em x = 1, pois nesta situação Log x = 0.

$$\text{Log } k = \text{Log } y \Rightarrow k = y = 2$$

Para obtemos o coeficiente angular (a) tomamos as coordenadas de dois pontos, os mais afastados possíveis, sobre a reta:



Do gráfico acima temos.

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log 100 - \log 2}{\log 7 - \log 1} = \frac{\dfrac{L_{100} - L_2}{M}}{\dfrac{L_7 - L_1}{M}} =$$

$$= \frac{\Delta L_{100-2}}{\Delta L_{7-1}} = \frac{12{,}7\ \text{cm}}{6{,}3\ \text{cm}} = 2{,}0$$

.

A relação funcional entre y e x está completamente determinada.

$y = 2\ x^{2}$

Ou podemos fazer o cálculo diretamente dos dados da tabela:
Para os pontos $x_1 = 2$, $y_1 = 8$, $x_2 = 6$ e $y_2 = 72$ teremos:

a = Log y2 – Log y1 / Log x2 – Log x1
a = Log 72 – Log 8 / Log 6 – Log 2
a = 1,857332 - 0,90309 / 0,778151 - 0,30103
a = 0,954243 / 0,477121
a = 2

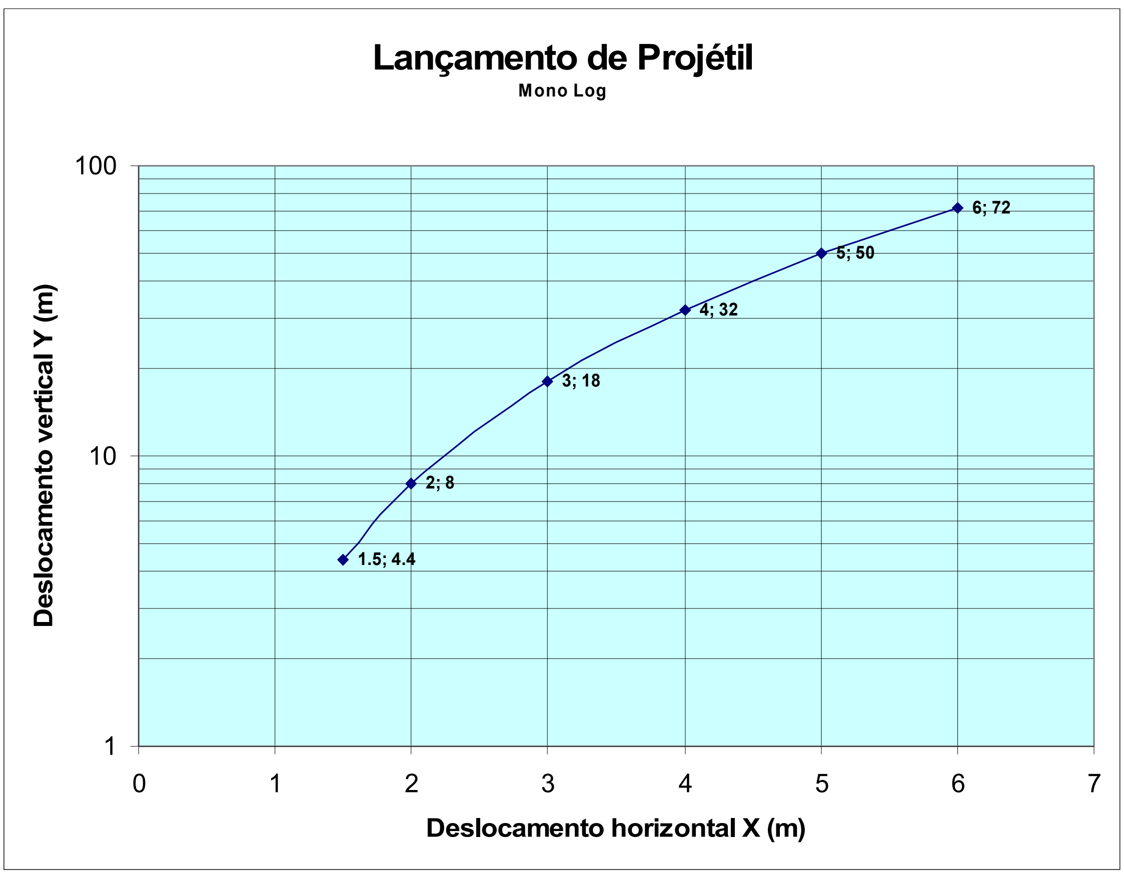
Com a expressão do movimento do projétil em mãos podemos calcular a altura que o mesmo estará do solo quando x = 10 m:

$Y = 2\ x^{2}$
$Y = 2\ 10^{2}$
Y = 2 100 = 200 m
Logo o projétil estará a uma altura de 200 m quando tiver percorrido 10 metros no solo a partir de seu lançamento.

c) Uma limitação dos gráficos em escala linear é em relação às escalas escolhidas. Se escolhermos uma escala que contenha valores muito grandes (1 s) não conseguiremos representar valores muito pequenos (0,001 s). Se escolhermos uma escala em que 0,001 s possa ser marcado com facilidade, provavelmente os dados maiores (1 s) não caberão sobre o papel. No entanto, o problema dos dados que não cabem sobre o gráfico pode ser resolvido por escalas logarítmicas.

Como a escala logarítmica é feita de tal maneira que a distância entre 1 e 2 é proporcional a (log 2 - log 1); a distância entre 2 e 3 é proporcional a (log 3 - log 2); e assim por diante fica evidente que tanto no gráfico *mono-log* como no *log-log* o aspecto do gráfico será diferente de quando você usa escalas lineares. Nessa escala, ao colocarmos diretamente os valores de x e y nós estamos fazendo com que as distâncias entre sucessivos valores de x e y sejam proporcionais a log (x) e log (y), porque as escalas foram construídas assim.

d) Para respondermos essa questão vamos construir o gráfico no papel mono-log



Observamos que o gráfico no papel *mono-log* também é uma curva, pois como vimos anteriormente, a linearização ocorrerá neste papel somente para equações do tipo $y = k\, b^{cx}$

Agora veremos a linearização deste outro tipo de equação.

USO DO PAPEL MONO LOG.

Fazendo **b = e** e aplicando logaritmo neperiano (base *e*) aos dois membros da equação acima teremos:
$y = k\, e^{cx}$

.$Ln\ y = Ln\ (ke^{cx})$
$Ln\ y = Ln\ k + Ln\ e^{cx}$
$Ln\ y = Ln\ k + cx\ Ln\ e$
$Y = K + cX$ (equação da reta)

Vemos que esta é uma relação linear entre Ln y e x com coeficiente linear Ln k e coeficiente angular c.

Como vimos anteriormente, distâncias estarão representando os logaritmos dos números, portanto, para se construir o gráfico, basta marcar diretamente os pontos correspondentes aos valores de x e y nos eixos logarítmicos.

O coeficiente linear Ln k da equação é obtido diretamente da ordenada y correspondente a $x = 0$ e como neste caso:

$Ln\ y = Ln\ k$ temos o valor de $y = k$ no ponto correspondente a $x = 0$.

Costuma-se indicar o valor de y para x = 0 como y_0 portanto:
$y_0 = k$

Quanto ao coeficiente angular da reta será dado pela relação:

$$c = \frac{\Delta \ln y}{\Delta x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$$

Lembrando que $L_n = M_e \ln y_n$ e substituindo na relação acima se obtém diretamente do gráfico:

$$c = \frac{L_2 - L_1}{M_e\,(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta L}{M_e\,\Delta x}$$

Onde o módulo M_e da escala na base e, assim como □L e□x são obtidos diretamente do gráfico medindo-se as distâncias correspondentes com uma régua.

e) Se fosse permitido somente o uso de uma régua sem escala e de um compasso seria impossível construir numa folha de papel em branco um sistema de coordenadas em escala logarítmica, pois precisamos das distâncias entre pontos consecutivos da escala em alguma unidade de medida (cm, mm, etc) e não conseguiríamos marcá-las sem uma régua milimetrada.
Já com uma régua milimetrada seria possível, pois marcaríamos os valores diretamente no papel com o compasso.

f) Acredito ser bastante útil discutir logaritmos no ensino médio a partir de outra ótica de ensino, como por exemplo, a abordagem **geométrica** do tema, pois os alunos não ficariam limitados ao trabalho com logaritmos apenas com exercícios que visam fixar as propriedades, e teriam um melhor entendimento do assunto.
Como vimos nesta atividade a linearização de curvas no mundo das ciências exatas é fator primordial para o entendimento das relações físicas entre grandezas e desta forma acredito ser muito importante a abordagem do tema "**Construção de gráficos em escalas logarítmicas**" no ensino médio, mesmo que não seja tão aprofundado. Já no ensino superior, acredito que este tema seja indispensável.

Freqüentemente, em experiências de física, medimos os valores de uma dada grandeza em função da variação nos valores de outra grandeza. Como resultado temos uma coleção de medidas relacionando ambas as grandezas, o que gera uma tabela de dados. Entretanto, suponha que também desejamos conhecer o comportamento de outros valores, os quais não aparecem na tabela de dados. Nesse caso não podemos abrir mão do **método gráfico**. Um gráfico tem a grande vantagem de tornar visível como a variação de uma grandeza afeta a outra.

Assim sendo, um gráfico, freqüentemente, nos permite determinar a dependência funcional entre as variáveis envolvidas e assim poder estimar por interpolação ou extrapolação outros valores que não tenham sido dados pela tabela. Trata-se de uma poderosa ferramenta de análise de dados experimentais, a qual tem levado à formulação de novas leis físicas. Além disso, o método gráfico é extremamente útil na comparação de dados teóricos e experimentais, pois qualquer discrepância entre a teoria e o experimento é facilmente observada.

Atividade 25

Explique a conexão existente entre os logaritmos e:

a)A música;

b)Os terremotos;

c)Os índices de intensidade sonora;

d)A desintegração radioativa.

a) Muitos estudantes de música sentem verdadeira aversão pela matemática – ou pelo menos pelo que lhes é oferecido na escola como sendo matemática. Para eles, deve ser uma surpresa saber que o grande filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) disse uma vez: "a Música é um exercício de Aritmética secreto e aquele que a ela se entrega às vezes ignora que maneja números". E é assim: ao acionarmos as teclas de um piano moderno, por exemplo, estamos a rigor teclando sobre logaritmos.

A Música tem ligações muito fortes com a Matemática. Uma delas diz respeito ao efeito produzido sobre nossos ouvidos por determinado som. O efeito depende sobretudo da altura do som (ou, como preferem os físicos, da sua freqüência, que é o número de vibrações por segundo, do objeto que produz som). Assim, fica claro que a cada som corresponde um número e a cada número, consequentemente, corresponde um som. Outra daquelas ligações aparece quando ouvimos dois sons simultaneamente. Isso equivale a perceber dois números, ou seja, uma relação. Ouvir o dó e o sol de uma mesma escala equivale a perceber a relação 2/3 (dois para três), que é a relação das freqüências desses dois sons.

Admite-se que um ouvido bem treinado pode distinguir, dentro de uma oitava, até no máximo 54 sons. Mas usar todo este potencial seria pouco prático. Pense comigo: um piano de oito oitavas teria de possuir 432 teclas. Assim, parece que a questão inicial, na história da música, foi o momento em que se escolheram alguns poucos sons, entre esses 54 que são possíveis. Foi uma responsabilidade muito grande, a desses primeiros teóricos que decompuseram a oitava. Talvez nenhuma outra arte tenha dependido de uma única decisão tão importante. - e, como sempre, coube aos gregos tomá-la. Eles desenvolveram a gama grega musical ao mesmo tempo que desenvolviam a Matemática.

Já passaram 2.500 anos e a gama diatônica (se as duas notas que formam o intervalo forem do mesmo nome: Dó – Dó#), ou de Pitágoras, continua sendo utilizada. Outras foram desenvolvidas, como por exemplo a dos físicos, ou de Zarlino, e a temperada, imortalizada pelo compositor alemão Johann Sebastian Bach (1685-1750). Elas não são perfeitamente equivalentes, do ponto de vista físico, mas na prática são utilizadas como se fosse. Uma mesma notação serve para todas elas.

Tomemos a corda que produz o som fá. Os 2/3 dessa corda produzem o dó (a quinta de fá, na escala comum), os 2/3 dessa o som sol (a quinta de dó) e assim por diante. De quinta em quinta teremos fá-do-sol-ré-lá-mi-si. Continuando o processo teremos os sustenidos bemóis. Nem todas da mesma oitava, é claro. Reduzidas à oitava inicial, elas aparecerão na ordem conhecida: dó-ré-mi-fá-sol-lá-si.

O princípio da gama dos físicos, ou de Zarlino, é diferente. Dois sons são mais agradáveis ao ouvido quanto mais harmônicos comum tiverem. Os harmônicos de um som são aqueles sons que correspondem ao seu dobro, triplo, quádruplo, etc. Alguns intervalos dessa gama coincidem com os da gama grega, outros estão bem próximos. Elas apresentam doze intervalos ligeiramente desiguais.

Já a gama temperada tem doze intervalos iguais. Nela, a potência doze de cada intervalo é igual a dois. Em outras palavras, o intervalo fundamental é a raiz duodécima de dois e as freqüências das doze notas estão em progressão geométrica. Os chamados graus de tonalidade da escala cromática não são eqüidistantes, nem pelo número de vibrações nem pelo comprimento de onda dos sons, mas representam os logaritmos de base dois dessas grandezas. A gama temperada é, pois, uma concepção matemática muito complicada. Bach só pode usá-la com sucesso porque, já antes dele, o matemático escocês John Napier (1550-1617) havia criado os logaritmos.

A freqüência do som emitido por uma nota musical qualquer da escala cromática de um piano – por exemplo, o dó –, quando tomamos a freqüência f do dó mais grave como referência, varia do seguinte modo em relação às alturas ou tonalidades dos vários sons emitidos por essa mesma nota musical, quando tomada em oitavas sucessivas:

Altura (a) de uma nota musical	Freqüência (f) do som emitido
Dó mais grave tomado como referência	n. 20 = n
Dó uma oitava acima (1a. oitava)	n. 21 = 2n
Dó duas oitavas acima (2a. oitava)	n. 22 = 4n
Dó três oitavas acima (3a. oitava)	n. 23 = 8n
Dó m oitavas acima (m-ésima oitava)	n.2m = 2m. n

Como se percebe, enquanto a altura ou tonalidade do som emitido por uma nota musical (altura esta medida tomando-se como unidade de medida o intervalo musical correspondente a uma oitava) varia de acordo com uma PA de razão 1, a freqüência desse mesmo som varia de acordo com uma PG de razão 2; ou, em outras palavras, a altura do som emitido por uma nota, medida em intervalos musicais de oitavas acima de uma certa nota musical tomada como referência, é igual ao logaritmo de base 2 de sua freqüência. Ou seja, a = log2f

Por exemplo, se quisermos montar a escala cromática do Lá central do teclado do piano (f = 220 Hz), teremos:

Nota	Símbolo	Termos da PG	Freqüência (Hz)
Lá	A	220	220
Lá# / Sib	A# / Bb	220. $2^{1/12}$ = 233,081880...	233
Si	B	220. $2^{2/12}$ = 246,941650...	247
Dó	C		261
Dó# / Réb	C# / Db		277
Ré	D		293
Ré# / Mib	D# / Eb		311
Mi	E		330
Fá	F		349
Fá# / Solb	F# / Gb		370
Sol	G		392
Sol# / Láb	G# / Ab		415
Lá	A		440

Sendo a freqüência da tônica igual a 220 Hz e da oitava, 440 Hz, a relação entre estas duas freqüências é exatamente 2. Sendo assim, o A2 terá freqüência 880 Hz, o A3 terá freqüência 1760 Hz e assim por diante, até o limite da audição humana.
A escala cromática de um piano é composta por 7 tons correspondentes às teclas brancas (dó, ré, mi,fá, sol, lá, si), e 5 semi-tons, correspondentes às teclas pretas (do#, mib, fá#, sol#, sib), teclas estas que estão dispostas na seguinte ordem no teclado: dó, do#, ré, mib, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, sib, si.
No terreno da Acústica, estabelece-se que, na escala cromática, cada nota sucessiva, a partir do dó central tomado como referência, possui 2 1/12 mais vibrações do que a anterior. Como a freqüência do dó central é definida como sendo 29 ciclos ou vibrações por segundo (ou, 29 Hz = 256 hertz), então, se estabelece a seguinte correspondência de freqüências para cada uma das notas da escala cromática:

Nota	Freqüência (Hz)
Dó	**2^9**
Dó#	**$2^9 . 2^{1/12}$**
Ré	**$2^9 . 2^{2/12}$**
Mib	**$2^9 . 2^{3/12}$**
Mi	**$2^9 . 2^{4/12}$**
Fá	**$2^9 . 2^{5/12}$**
Fá#	**$2^9 . 2^{6/12}$**
Sol	**$2^9 . 2^{7/12}$**
Sol#	**$2^9 . 2^{8/12}$**
Lá	**$2^9 . 2^{9/12}$**
Sib	**$2^9 . 2^{10/12}$**
Si	**$2^9 . 2^{11/12}$**

Desse modo, a freqüência do dó com tonalidade uma oitava acima do dó central seria 29. 2 12/12 = 2 29 vibrações por segundo, confirmando a fórmula anterior que afirma a existência de uma PG de razão 2 entre as diferentes freqüências de uma mesma nota tocada em oitavas sucessivas. A correspondência anterior também nos mostra a existência de uma PG de razão 2 1/12 entre as diferentes freqüências das notas sucessivas da escala cromática.
Com base nesse exemplo particular, vamos, em seguida, generalizar esse estudo relativo à dependência funcional que se pode estabelecer entre a freqüência e a altura dos sons emitidos pelas teclas de um piano. Para isso, vamos imaginar um piano com um certo número k de teclas e façamos
corresponder a cada uma dessas teclas, a partir do dó mais grave, os números 0, 1, 2, 3, 4, ... k.
Como só existem 12 tons e semi-tons na escala cromática, os quais se repetem com alturas cada vez mais elevadas em oitavas sucessivas, vamos subdividir todas as teclas desse piano em grupos de 12 de modo que a uma mesma nota musical (tom ou semi-tom) de qualquer oitava sempre seja
associado um mesmo número natural p (0 < p < 11). Além disso, para distinguirmos, umas das outras, notas musicais idênticas, mas com tonalidades ou alturas diferentes, vamos associar, a cada uma das m oitavas desse piano, números naturais de 1 a m, onde m ³ 1. Desse modo, o nosso piano terá k =

p.m teclas. Seja ainda fpm a freqüência da p-ésima nota musical da m-ésima oitava e n a freqüência de cada um dos tons ou semi-tons das notas da escala cromática pertencente a qualquer oitava. Tendo em vista o fato anterior de que, na escala cromática, cada nota sucessiva, a partir da nota dó mais grave tomada como referência, possui 2 1/12 mais vibrações do que a anterior, vem:

$$f_{pm} = n \,.2^{m} \,.2^{\,p/12}$$

Aplicando o logaritmo de base 2 a esta fórmula obtemos:

$$\log_2 f_{pm} = \log 2\ n + m \log^2 2 + p/12 \,.\, \log_2 2 \Rightarrow \log_2 f_{pm} = \log_2 n + (m + p/12)$$

Como estamos tomando a freqüência do dó mais grave como unidade, então, n = 1 $\Rightarrow \log_2 n = 0$. Daí vem:

$$\log_2 f_{pm} = m + p/12 \Rightarrow f_{pm} = 2^{\,m + p/12}$$

Para a primeira oitava da escala cromática temos m = 1 e 0 < p < 11. Assim, m + p/12 = 1 + p/12.

Fazendo m = 1 e p variar de 0 a 11, obtemos a seqüência:

1, (1 + 1/12), (1 + 2/12), (1 + 3/12), ... , isto é, uma PA de razão 1/12.

O mesmo acontece para a escala cromática ampliada contendo todas as oitavas. Desse modo, como m + p/12 é uma PA de razão 1/12, e como f_{pm} é uma PG de razão $2^{\,1/12}$, concluímos que o número associado a qualquer tecla correspondente a cada uma das notas musicais da escala cromática ampliada de um piano é igual ao logaritmo na base 2 da freqüência do som emitido por essa mesma tecla.

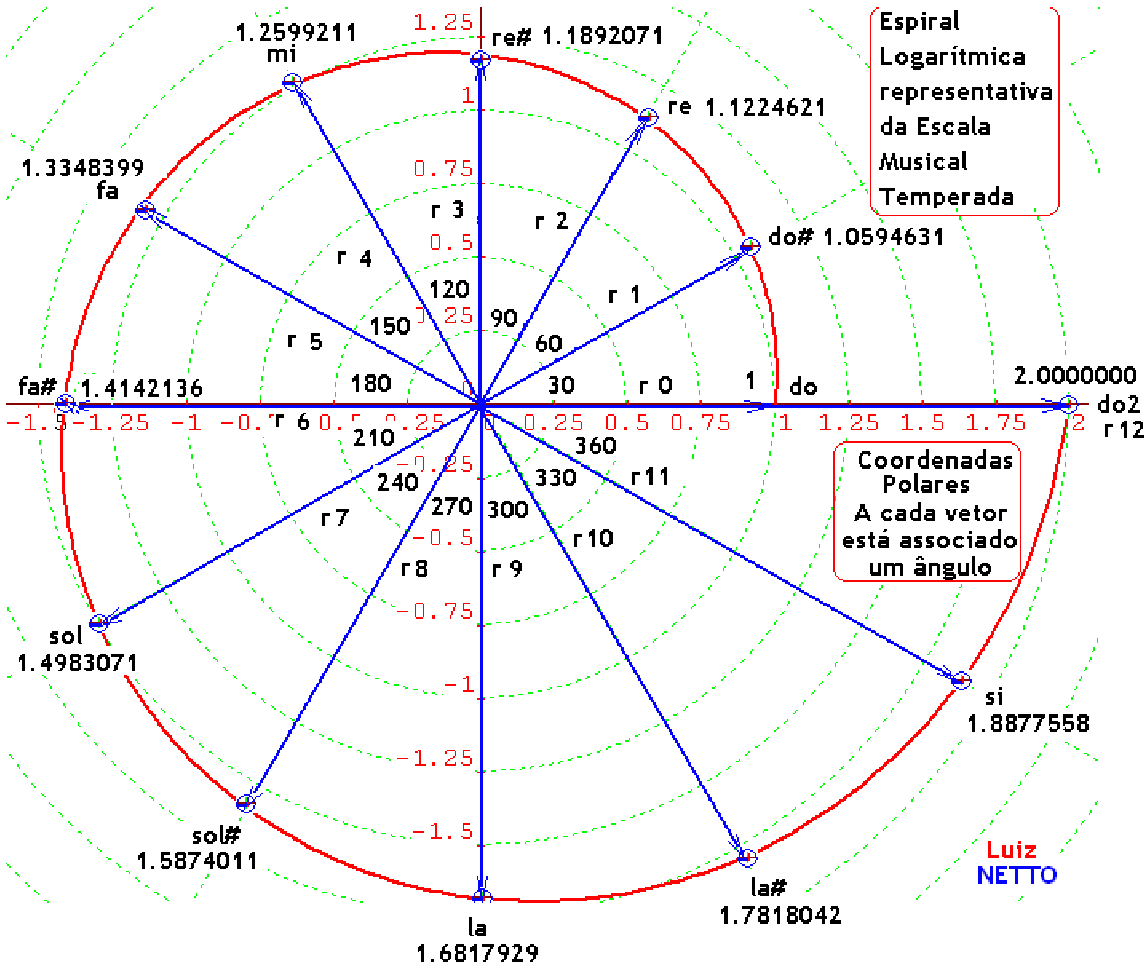
Essa relação permanece válida mesmo quando n não for um número inteiro. Como $\log_2 3$ = 1,5849625007..., duas notas cujas freqüências estiverem na razão de 3:1 distam entre si de 1,5849625007... oitavas.

Atualmente sabemos que a razão das freqüências dos sons emitidos por instrumentos de cordas seria a razão inversa dos seus comprimentos, ou seja, de 2 para 1 e que duas cordas vibrantes produzem som com a mesma nota se e somente se a razão de seus comprimentos é uma potência inteira de base 2.

A freqüência da nota lá fundamental ou padrão (o lá central do piano) é 440 Hz e a freqüência do lá seguinte (uma oitava acima), mais agudo, é 880 Hz (Hz é a abreviatura de hertz, unidade de freqüência que significa ciclo por segundo).

A escala musical ocidental, a partir de Andreas Werkmeister (1645 - 1706) e Johann Sebastian Bach (1685 - 1750), denominada de escala cromática (ou temperada), divide esse intervalo em doze semitons iguais, isto é, tais que a razão (divisão) das freqüências de notas consecutivas é constante. Essas notas se sucedem na ordem LÁ, LÁ#, SI, DÓ, DÓ#, RÉ, RÉ#, MI, FÁ, FÁ#, SOL, SOL#, LÁ, ... (o símbolo # é chamado de sustenido).

ESPIRAL LOGARÍTMICA REPRESENTATIVA DA ESCALA MUSICAL TEMPERADA



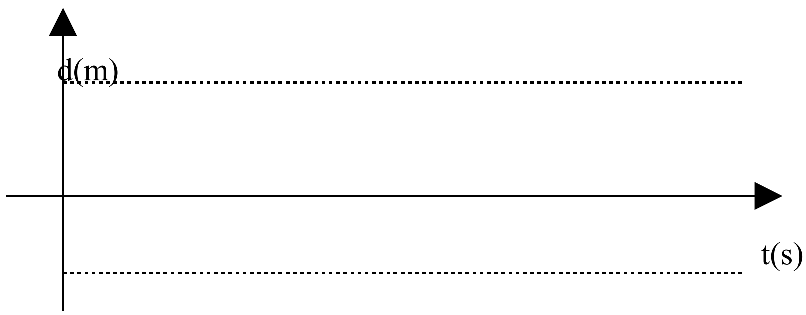
b) Abandonando-se um pequeno dado sobre a superfície terrestre, ocorrerá uma liberação de energia que a fará vibrar levemente. Se no lugar do dado for abandonado um tijolo, a energia liberada fará vibrar mais intensamente essa superfície. Imagine um cubo de granito de 2 Km de aresta abandonado de uma altura de 280 Km; a energia liberada será equivalente a 20 trilhões de Kwh (quilowatt-hora). Essa foi a medida de energia liberada pelo terremoto ocorrido em S. Francisco, Califórnia em 1906. Mais violento ainda foi o terremoto que arrasou Lisboa em 1755, liberando energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

Os logaritmos são aplicados na medida da intensidade de um terremoto. Na escala Richter, a intensidade I de um terremoto é definido por:

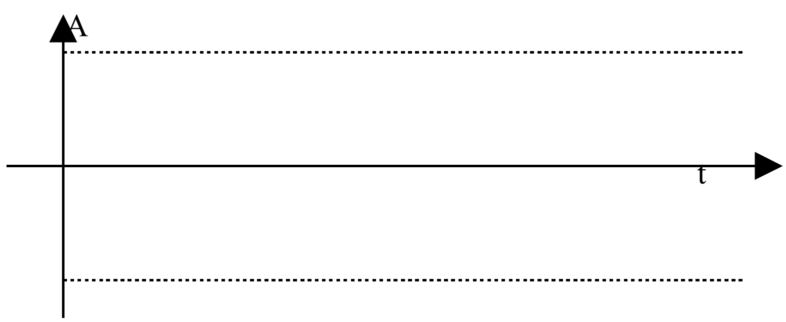
,

Em que E é a energia liberada pelo terremoto, em KWh, e E0 = 10-3 KWh

A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se do movimento das placas tectônicas. O atrito de uma placa contra outra forma ondas mecânicas. Estas ondas são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismógrafo mede a amplitude e a freqüência dessas vibrações, utilizando uma equação logarítmica, pode calcular a magnitude do terremoto.
A amplitude está associada a altura (tamanho) da onda e freqüência com a quantidade de ondas num determinado intervalo de tempo. Podemos observar estes dados no gráfico de distância d (em metros) em função do tempo t em segundos.



Durante o terremoto, o sismógrafo registra a magnitude de um terremoto durante um pequeno intervalo de tempo:



A magnitude do terremoto pode ser calculada pela equação logarítmica:

$$Ms = \log 10\ (A\ .\ f) + 3.30$$

Magnitude do terremoto Amplitude do movimento da onda freqüência da
onda na escala Richter registrada no sismógrafo (em μm) (em hertz)

Enquanto os tremores suaves podem ocorrer em qualquer região do globo, os grandes terremotos geralmente ocorrem perto das bordas das principais placas que constituem a crosta e ao longo das elevações no meio do oceano, onde uma nova crosta está em formação. O alcance e o impacto dos terremotos dependem da energia que liberam; seu ponto de origem está geralmente localizado em uma profundidade não superior a 30km, sendo denominado foco. O EPICENTRO é o ponto da superfície terrestre localizado verticalmente acima do foco; as ondas de choque deslocam-se para o exterior do epicentro com velocidades distintas em diferentes camadas da crosta terrestre. As ondas superficiais e de cisalhamento chegam juntas, a uma distância de aproximadamente 2000 km do epicentro, ao passo que as ondas de compressão viajam mais profundas e lentamente.

O sismógrafo moderno funciona a partir de um pêndulo, além disso possui um dispositivo eletromagnético de registro. Até 1935, a intensidade de um terremoto era avaliada subjetivamente em termos dos efeitos observados, neste ano, Charles Francis Richter introduziu uma escala quantitativa relacionada com o logaritmo da amplitude máxima das ondas de choque registradas, levando em conta a distância a partir do epicentro.

Como já explicamos, os sismógrafos amplificam e descrevem o movimento do solo, em uma tira de papel, chamamos isso de sismograma. Nos sismogramas são registrados diferentes tipos de ondas geradas por um tremor que alcança uma estação sismológica, dada em uma ordem sucessiva de tempo. A localização do epicentro de um tremor se acha analisando esses registros e identificando os diferentes tipos de onda, em particular as ondas P e S, na linguagem dos sismólogos, permitem uma técnica muito utilizada para determinação do epicentro. Para compreender melhor este método observamos que as ondas P viajam numa velocidade maior que as ondas S.

Em teoria, se temos uma estação sismológica podemos com três componentes reconstruir o movimento das partículas quando incidem as ondas P, por exemplo, e conhecer a direção de saída da onda. Na prática, não podemos confiar totalmente na precisão deste método, para isso recorre-se a dados de outras estações sismológicas para obter estimativas da localização do epicentro. Concluímos então que são necessárias ao menos três estações para localizar com menor possibilidade de erro.

A primeira tentativa de catalogar os tremores surgiu por meio de uma classificação baseada unicamente na observação. Em 1902, Mercalli propôs uma tabela, que foi posteriormente modificada em 1931 e desde então é chamada de Escala modificada de Mercalli (MM). Esta não é a única, mas é a mais usada. Consta 12 graus de intensidade.
A escala de intensidade permite descobrir de maneira sucinta os efeitos de um tremor, como também os danos maiores encontram-se nos arredores do evento, a distribuição da intensidade, permite estimar o epicentro do tremor.

A maneira mais conhecida e mais amplamente utilizada para classificar os sismos foi concebida por Richter, que definiu a escala de magnitude. Consideramos um sismo com um foco, se temos estações instaladas mais próximas do foco ou mais distantes, os movimentos detectados por estas será cada vez menor. Se colocarmos em um gráfico, os valores do logaritmo da amplitude contra distância, obtemos pontos onde, as curvas mais baixas representam um tremor menor, visto que ocasiona menor movimento, do terreno. Podemos então tomar qualquer sismo como sendo um sismo padrão e assinalar sua magnitude, os demais podem ser medidos a partir deste, medindo a separação entre eles para qualquer distância do epicentro.

Analogamente à expressão citada anteriormente definiremos a magnitude através da fórmula:

$$ML = \log A - \log A0$$

Onde A é a máxima extraída no sismograma de um tremor e A0 é a máxima amplitude do tremor padrão. Aqui ressalta a necessidade de definirmos tanto um tremor padrão como definirmos um sismógrafo padrão. Richter definiu esta magnitude utilizando a rede de informações sismológicas da Califórnia e utilizou os sismos dessa região e fez uma escala que ele chamou de magnitude local, a fórmula de Richter era expressa assim:

$$ML = \log A + 3$$

A definição de magnitude de Richter tornou-se um grande instrumento para o estudo dos tremores. Em 1936 Richter e Beno Gutenberg, desenvolveram uma nova escala aplicada em tremores em outros tipos de terreno. Esta escala utiliza a amplitude da onda superficial horizontal com período de 20 segundos. A fórmula determinada foi:

$$Ms = \log A - \log B + C + D$$

Nesta equação A é a amplitude total, definida a partir da dimensão do plano, da onda superficial com período aproximado de 20 segundos. B é o valor máximo da amplitude horizontal. C e D são constantes dependentes de cada estação e depende do tipo de terreno em que se encontra a estação, o instrumento, a profundidade focal. Por outro lado, em 1945 e 1956, Gutenberg desenvolveu uma nova escala aplicada a tremores profundos utilizando a amplitude das ondas internas, esta escala é dada pela fórmula:

$$Mb = \log (A/T) + B + C$$

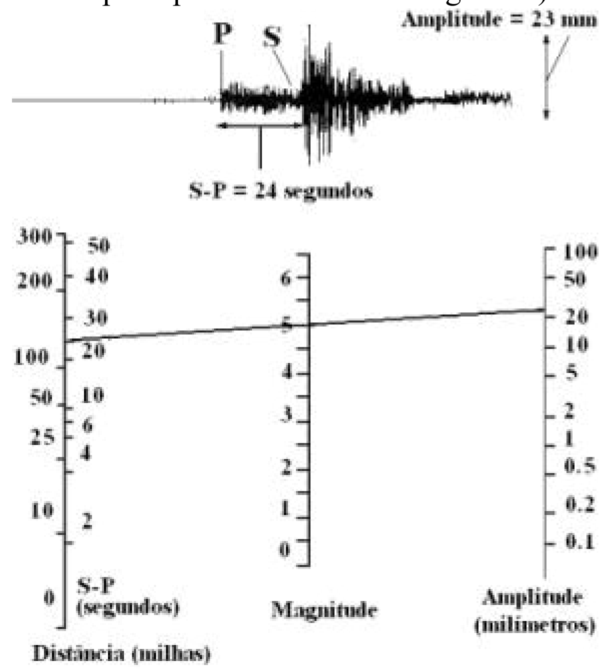
Onde A é a amplitude da onda, T é o período da onda, B e C são constantes dependentes de características do sismo e da estação sismológica.
Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos.

Para cobrir todos os tamanhos de terremotos - desde os microtremores de magnitude negativas até os super-terremotos, com magnitudes superiores a 8.0 - foi idealizada uma escala logarítmica, sem limites. Entretanto, a própria natureza impõe um limite superior a esta escala já que ela está condicionada ao próprio limite de resistência das rochas da crosta terrestre.
Magnitude e energia podem ser relacionadas pela fórmula descrita por Gutenberg e Richter, em 1965:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5M$$

onde: E = energia liberada em ergs
M = magnitude do terremoto.
Relação entre magnitude e energia de um terremoto
O volume das esferas é proporcional ao total da energia liberada para as magnitudes 1, 2 e 3. Nessa mesma escala, o maior terremoto já registrado no Brasil (em 31/01/55, magnitude 6.6) deveria ser representado por um círculo com diâmetro igual a 75 metros. O maior terremoto já registrado no mundo (Chile, 22/05/60) teria um círculo com diâmetro aproximado de 11 km.

O terremoto do Chile liberou energia equivalente a 28.2 anos de produção da Usina de Itaipu, operando com potência plena (12,6 GW).
No gráfico ao lado, é apresentado um nomograma para ser utilizado no cálculo da magnitude. A distância do sismo, avaliada pela diferença entre asa chegadas das ondas S e P (em exemplo apresentado de 24 segundos) e a amplitude máxima



(23mm) no sismograma Wood-Anderson do trem de ondas geradas por sismo marcam dois pontos n as escalas externas do monograma. Conectando estes dois pontos encontra-se a magnitude do sismo = 5.0. Cada acréscimo no grau da escala de magnitude representa um aumento de 10 vezes na medida da amplitude de uma onda e um incremento aproximado de 32 vezes da energia sísmica liberada.

Na prática existem diferentes maneiras e métodos de determinar magnitudes, mas todas elas podem ser relacionadas entre si. Atualmente, a tendência é utilizar a magnitude baseada no momento sísmico, que representa uma medida com significado físico.

A escala Richter aumenta de forma logarítimica, de maneira que cada ponto de aumento sigifica um aumento 10 vezes maior. Dessa forma, um sismo de magnitude 4 é 100 vezes maior que um de 2. No entanto, é importante salientar que o que aumenta é a amplitude das ondas sismográficas e não a energia liberada. Em termos gerais a energia de um terremoto aumentaria um fator 33 para cada grau de magnitude, ou aproximadamente 1000 vezes a cada duas unidades.

Mag	**Escala Richter e efeitos associados**
1	Não é sentido pelas pessoas. Só os sismógrafos registram
2	É sentido nos andares mais altos dos edifícios
3	Lustres podem balançar. A vibração é igual à de um caminhão passando
3.5	Carros parados balançam, peças feitas em louça vibram e fazem barulho
4.5	Pode acordar as pessoas que estão dormindo, abrir portas, parar relógios de pêndulos e cair reboco de paredes
5	É percebido por todos. As pessoas caminham com dificuldades, livros caem de estantes; os móveis podem ficar virados
5.5	As pessoas têm dificuldades de caminhar, as paredes racham, louças quebram
6.5	Difícil dirigir automóveis, forros desabam, casas de madeira são arrancadas de fundações. Algumas paredes caem
7	Pânico geral, danos nas fundações dos prédios, encanamentos se rompem, fendas no chão, danos em represas e queda de pontes.
7.5	Maioria dos prédios desaba, grandes deslizamentos de terra, rios transbordam, represas e diques são destruídos
8.5	Trilhos retorcidos nas estradas de ferro, tubulações de água e esgoto totalmente destruídas
9	Destruição total. Grandes pedaços de rocha são deslocados, objetos são lançados no ar

A escala de Mercalli tem 12 graus:

Intensidade I : Nenhum movimento é percebido.

Intensidade II : Algumas pessoas podem sentir o movimento se elas estão em repouso e/ou em andares elevados de edifícios.

Intensidade III : Diversas pessoas sentem um movimento leve no interior de prédios. Os objetos suspensos se mexem. No exterior, no entanto, nada se sente.

Intensidade IV : No interior de prédios, a maior parte das pessoas sentem o movimento. Os objetos suspensos se mexem, e também as janelas, pratos, armação de portas.

Intensidade V : A maior parte das pessoas sente o movimento. As pessoas adormecidas se acordam. As portas fazem barulho, os pratos se quebram, os quadros se mexem, os objetos pequenos se deslocam, as árvores oscilam, os líquidos podem transbordar de recipientes abertos.

Intensidade VI : Todo mundo sente o terremoto. As pessoas caminham com dificuldade, os objetos e quadros caem, o revestimento dos muros pode rachar, árvores e os arbustos são sacudidos. Danos leves podem acontecer em imóveis mal construídos, mas nehum dano estrutural.

Intensidade VII : As pessoas têm dificuldade de se manter em pé, os condutores sentem seus carros sacudirem, alguns prédios podem desmoronar. Tijolos podem se desprender dos imóveis. Os danos são moderados em prédios bem construídos, mas podem ser importantes no resto.

Intensidade VIII : Os condutores têm dificuldade em dirigir, casas com fundações fracas tremem, grandes estruturas, como chaminés e prédios podem se torcer e quebrar. Prédios bem construídos sofrem danos leves, contrariamente aos outros, que sofrem severos danos. Os galhos das árvores se quebram, colinas podem ter

fissuras se a terra está úmida e o nível d'água nos poços artesianos pode se modificar.
Intensidade IX : Todos os prédios sofrem grandes danos. As casas sem alicerces se deslocam. Algumas canalizações subterrânes se quebram, a terra se fissura.
Intensidade X : A maior parte dos prédios e suas fundações são destruídos, assim como algumas pontes. As barragens são significativamente danificadas. A água é desviada de seu leito, largas fissuras aparecem no solo, os trilhos das ferrovias entortam.
Intensidade XI : Grande parte das construções desabam, as pontes e as canalizações subterrâneas são destruídas.
Intensidade XII : Quase tudo é destruído. O solo ondula. Rochas podem se deslocar.

c) O ouvido íntegro pode ser sensibilizado por uma onda mecânica que se propaga num campo ondulatório (meio material), como o ar, desde que essa onda apresente intensidade suficiente e sua freqüência encontre-se dentro de certo intervalo subjetivo. Se a freqüência da onda sonora pertence ao intervalo subjetivo (depende do observador), 16Hz -------- 20000 Hz, esse som é audível para o ser humano.

Em toda a propagação ondulatória há transporte de energia que é originado da fonte sonora nas ondas tridimensionais. Para determinar a energia sonora com que a onda sonora atravessa determinada região, utiliza-se a grandeza intensidade (I).

A onda sonora na fonte (F) atravessa a superfície de área ΔS perpendicularmente a direção da propagação, transportando a energia ΔE no intervalo de tempo Δt . Definimos então:

$$I_{\text{média}} = \Delta E / \Delta t.\ \Delta S \Rightarrow I_{\text{média}} = P / \Delta S$$

Por definição temos:

$$\Delta E/\Delta t = P \text{ (potência média)}$$

A unidade da intensidade, no Sistema Internacional (SI), é Watts por metro quadrado (W/m^2).
*Observação: quanto maior a amplitude de oscilação, maior é a potência da onda sonora emitida.

MEDIDA DO NÍVEL SONORO

Para medir o nível sonoro utilizamos uma escala logarítmica.
O nível sonoro β é calculado por:

$$\beta = \log \frac{I}{I_0}, \text{ onde}$$

I é a intensidade física do som que se quer medir
I_0 é a menor intensidade física do som audível
β > nível sonoro de I

A unidade utilizada para nível sonoro é o bel, que tem por símbolo B, e que homenageia Graham Bell (1847-1922), o inventor do telefone. Na prática, no entanto, utilizamos o decibel (simbolizado por db), que equivale à décima parte do bel.

Chame-se nível de intensidade a intensidade sonora média percebida ou detectada pelo sistema auditivo humano, baseado em padrões fisiológicos médios, admite-se:

*Intensidade sonora mínima percebida pelo ser humano seja, em média, Io = 10^{-12}W/ m^2 para freqüência de 1000Hz.

*O nível de intensidade β varia em escala logarítmica de base 10. Isso significa que sons de intensidade 10n vezes maior que a intensidade mínima (I_0) sejam percebido com nível de intensidade n Vezes maior, por exemplo, um som de mil vezes maior que I_0 é percebido em média como se estivesse intensidade três vezes maior.

$$B = 10. \log (I / Io)$$

A seguir exemplo de intensidade sonora e nível de intensidade :
*Limiar da audição: Io = 10^{-12} W/m^2 $\Rightarrow$ 0 dB
*Conversação de 1 metro: Io = 10^{-6} W/m^2 $\Rightarrow$ 60 dB
*Limiar da dor: Io = 10^2 $\Rightarrow$ 120 dB

O dB é uma unidade logarítmica muito usada em telecomunicações, por pelo menos dois motivos:
- O ouvido humano tem resposta logarítmica (sensação auditiva versus potência acústica)
- Em telecomunicações, se usam números extremamente grandes ou pequenos. O uso de logaritmos torna estes números pequenos e fáceis de manipular, e transforma produtos em somas e divisões em subtrações.

O dB é um número relativo e permite representar relações entre duas grandezas de mesmo tipo, como relações de potências, tensões, correntes ou qualquer outra relação adimensional.
Portanto, permite definir ganhos e atenuações, relação sinal/ruído, dinâmica, etc...

d) Os fundamentos do estudo da radioatividade ocorreram no início do século por Rutherford e outros. Alguns átomos são naturalmente instáveis, de tal modo que após algum tempo, sem qualquer influência externa sofrem transições para um átomo de um novo elemento químico e durante esta transição eles emitem radiações. Rutherford formulou um modelo para descrever o modo no qual a radioatividade decai.

Sendo assim, decaimento radioativo ou desintegração radioativa é a desintegração de um núcleo através da emissão de energia em forma de partículas ou radiação.

Se o núcleo de um determinado nuclídeo se encontrar numa situação de instabilidade, seja por ter um excesso de prótons ou de neutrons, ou excesso de ambos, tende a transformar-se noutro nuclídeo mais estável.
Devido às desintegrações que vão acontecendo ao longo do tempo, o número de núcleos instáveis contidos numa fonte radioativa vai diminuindo.
Os processos de desintegração radioativa mais comuns são os de desintegração α (alfa), β (beta) e γ (gama).

Experimentalmente se observa que a atividade de uma substância radioativa diminui com o tempo. O gráfico que representa o processo de desintegração é do tipo exponencial.

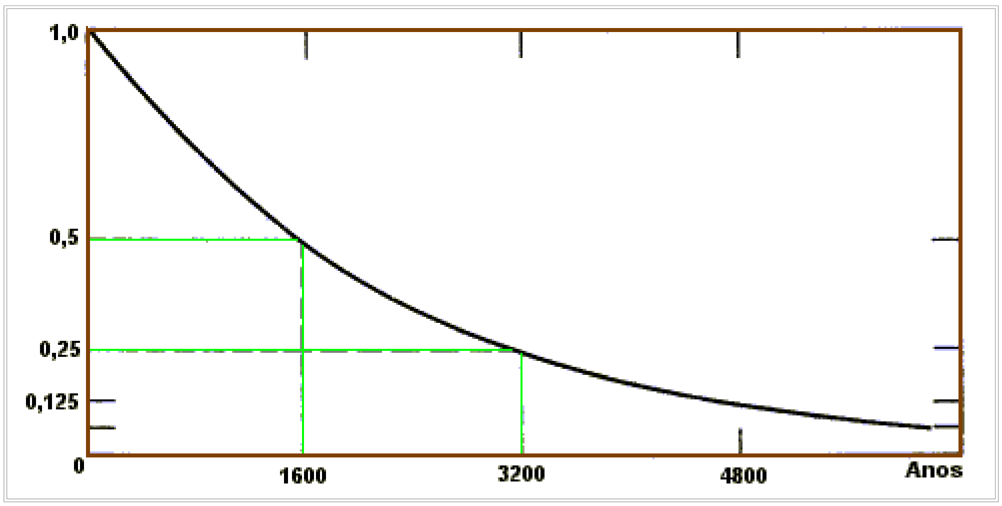


Fig. 5.2- Curva de desintegração do rádio-226

Este comportamento é descrito matematicamente por uma lei exponencial.
Se N=N(t) representa o número de átomos da substância radioativa no instante t, No o número de átomos no instante t=0 e k é uma constante positiva chamada de constante de decaimento, então:

$$N(t) = No\ e-k.t$$

esta constante de decaimento k, tem valores diferentes para substâncias diferentes, sendo obtidas experimentalmente.
Na prática usamos uma outra constante T, denominada meia-vida do elemento químico, que é o tempo necessário para que a quantidade de átomos da substância decaia pela metade.

Se N=No/2 para t=T, temos

$$No/2 = No\ e-k.T$$

assim

$$T=Ln(2)/k$$

Na tabela, apresentamos indicadores de meia-vida de alguns elementos químicos:

Substância	Meia-vida T
Xenônio 133	5 dias

Bário 140	13 dias
Chumbo 210	22 anos
Estrôncio 90	25 anos
Carbono 14	5.568 anos
Plutônio	23.103 anos
Urânio 238	4.500.000.000 anos

Para o Carbono 14, a constante de decaimento é:
k = Ln(2)/T = Ln(2)/5568 = 12,3386 por ano

Análise dos Programas de Ensino

PRIMEIRO PERÍODO: entre a proclamação da República (1889) e a Reforma Francisco Campos (1931)

1850 até 1856 – O estudo de logaritmos foi introduzido no 5º ano do ensino fundamental, fazendo parte do conteúdo de Aritmética e Álgebra.

> Antes da abordagem do tema, é necessário o estudo de outros assuntos que servem de subsídios, por exemplo, o estudo da raiz quadrada, proporções e suas propriedades, progressões, raiz cúbica dos números.
> Neste programa o 1º tópico envolvendo logaritmos é a extração de raízes por Logaritmo, em seguida era estudado o uso das tábuas Logarítmicas. Achar o logaritmo de um número que não vem nas tábuas, Potência (achar a potência de um número por meio de Logaritmos), determinar o 4º termo de uma proporção por meio dos logaritmos.

1856 – O estudo de logaritmos foi apresentado no 2º ano com o tema "Logaritmo: Aplicação da Teoria dos Logaritmos"

> No programa de 1856 o tema aparece novamente em Aritmética e Álgebra. As matérias antecessoras eram: Progressão por Quociente e suas principais propriedades (Progressão Geométrica), Regras de três simples e compostas, Raiz quadrada, Proporções, Raiz cúbica. A matéria sucessora tratava-se de juros compostos, Divisão de monômios e polinômios, Equações de 1º grau.

1858 até 1862 – Logaritmos: Aplicação da Teoria dos Logaritmos (Aritmética)
Neste período os logaritmos foram introduzidos no 3º ano ginasial, hoje equivalente à oitava série do ensino fundamental.

> Em 1858 foi implantado um novo programa de ensino. No 2º ano dentro de Aritmética estudava-se Raiz quadrada, Raiz cúbica, Proporções. Essas matérias serviam de pré-requisitos para os temas que eram estudados no 3º ano, como a Regra de três, Juros compostos, Progressões. Em seguida estudavam-se Logaritmos e suas aplicações.
>
> Não houve alterações dentro de Aritmética no programa de 1862, permanecendo o mesmo esquema do programa de 1858.

1877 – Teoria Elementar dos Logaritmos e uso das Tábuas (Aritmética)

> No novo programa de 1877, os Logaritmos ainda aparecem dentro da Aritmética, mas aparece no 4º ano (1º colegial do ensino médio). As matérias antecessoras ainda

eram as mesmas, havendo alteração apenas com relação ao tema Juros compostos, que passa a ser estudado depois.

1878 – Teoria Elementar dos Logaritmos e uso das Tábuas (Aritmética). Introduzido no 2º ano (6ª série do ensino fundamental)

No ano seguinte, 1878, implantou-se um novo programa. As matérias fundamentais (que servem de subsídio) eram estudadas no 1º ano. No 2º ano eram estudadas Progressões Geométricas, Progressões Aritméticas e logo em seguida o tema Logaritmos. Na seqüência eram estudados Juros Compostos, como nos outros anos.

1882 – Logaritmos (Aritmética). Introduzido no 3º ano (7ª série do ensino fundamental)

Em 1882, algumas matérias fundamentais que eram ensinadas na Aritmética passam a ser lecionadas em Álgebra. As que permaneceram dentro de Aritmética foram as Progressões e Proporções. Todas essas matérias passaram a ser lecionadas no 3º ano.

1892 – Progressão – Logaritmos (Aritmética). Introduzido no 1º ano (5ª série do ensino fundamental)

Em 1892, surge um novo programa. Logaritmos e suas matérias antecessoras eram vistas no 1º e no 3º ano. A teoria aplicada no 1º ano sobre os temas era uma base que era aprofundada no 3º ano. Toda matéria era vista dentro da Aritmética.

1893 – Aritmética - Logaritmos

No programa de 1893, os Logaritmos eram vistos dentro da Aritmética no 1º ano, sendo antecedidos por Progressões, Razões e Juros simples. No 2º estudavam-se Progressões e Logaritmos e no 3º ano eram vistos Binômio de Newton e em seguida Logaritmo. Na seqüência eram vistas Equações Exponenciais.

1895 – Aritmética – Progressões. Logaritmos. Introduzido no 1º ano

O programa de 1895 não sofreu alteração em relação ao programa anterior, seguindo o seu mesmo esquema. No 2º ano eram visto dentro do tema Progressões por quociente e teoria algébrica dos logaritmos.

1898 – Dos Logaritmos (Aritmética)

Em 1898, os Logaritmos eram vistos em Aritmética no 1º ano, antecedidos por Progressões, Proporções, Frações decimais. No 3º ano eram visto em Álgebra sob o tema: Logaritmos. Cálculo exponencial e frações contínuas.

1912 – Progressões. Logaritmos. Introduzido na 2ª série

A partir de 1912 os Logaritmos passaram a ser vistos em dois anos, na 2ª e na 3ª série sendo antecedidos pelas mesmas matérias fundamentais dos anos anteriores.

1915 até 1926 – Álgebra. Progressões Aritméticas. Progressões Geométricas. Logaritmos

> No programa de 1915 o estudo das tábuas é acrescentado. As matérias antecessoras eram as mesmas e o tema passou a ser desenvolvido no 3º ano.
>
> Em 1926 no 1º e no 2º ano estudava-se o básico de Proporções, Raízes, Regra de três, Progressões, Potenciação. No terceiro ano em Álgebra havia um aprofundamento dessas matérias e iniciava-se o estudo de Equações Exponenciais em seguida resolução pelos Logaritmos e juros compostos.

1929 – Logaritmos. Propriedades Fundamentais. Uso das Tábuas (Álgebra)

> O próximo programa de ensino foi o de 1929. A matéria Logaritmo era vista em Álgebra no 3º ano. Antes de Logaritmo eram vistas as Progressões e depois eram vistas as Equações Exponenciais. Logo após são introduzidas noções de Análise combinatória e o Binômio de Newton.

1931 – Os tópicos principais eram divididos da seguinte forma: 1º ano (Aritmética), 2º ano (Aritmética), 3º ano (Álgebra) e 4º ano (Geometria e Trigonometria).

> No programa de 1931, logo na 1ª série em Álgebra é dada uma noção de expoente. Na 2ª série o expoente zero e o expoente negativo eram estudados. Na 3ª série eram vistos Potência e Raiz. Na 4ª série estudavam-se progressões Aritméticas e Geométricas, suas propriedades e interpolação.
>
> Em seguida vem o estudo da Função Exponencial, o Logaritmo (suas propriedades e o uso das tábuas), régua Logarítmica, em seguida o estudo sobre juros. Na 5ª série misturava-se Geometria com Álgebra e Aritmética, para o estudo das tábuas de Logaritmos. Na seqüência eram introduzidas as noções de Análise Combinatória e o Binômio de Newton.

Conclusão

Durante o 1º período a apresentação do estudo de logaritmos foi feita em todas as séries do ginasial até o 1º ano colegial (ensino médio). Durante as aulas as ferramentas eram usadas, num primeiro momento como instrumento de extração de raízes.

Com a utilização das tábuas de logaritmos, permitiu-se encontrar logaritmos de outros números não contidos nas tábuas, possibilitando resoluções de equações exponenciais, aplicações em finanças (juros compostos), aos estudos de progressões aritméticas e geométricas.
Em 1895 já havia uma proposta de subdivisão do assunto para os dois primeiros anos consecutivos. Estudavam-se progressões aritméticas e geométricas no 1º ano e os demais assuntos no 2º ano.

Programas de Ensino – Logaritmos
Tabela

Ano	*Série*	*Áreas*	**Matéria Anterior**	**Matéria Posterior**
1850	5º ano	Álgebra e Aritmética	Raiz quadrada e cúbica, Proporções e Progressões.	Tábuas Logarítmicas, Potências.
1856	2º ano	Álgebra e Aritmética	Progressão geométrica, Raiz quadrada e cúbica, Proporções.	Juros compostos.
1858 e 1862	2º ano 3º ano	Aritmética	Raiz quadrada e cúbica, Proporções, Regra de três, Progressões, Juros compostos.	Aplicações dos Logaritmos.
1877	4º ano	Aritmética	Raiz quadrada e cúbica, Proporções, Regra de três Progressões Juros compostos.	Juros compostos.
1878	1º ano 2º ano	Aritmética	Progressões e Juros compostos.	________________
1882	3º ano	Álgebra	Progressões e as Proporções.	Juros simples e composto.
1892	1º ano 3º ano	Aritmética	Raiz quadrada, cúbica, Proporções.	Juros simples e composto.
1893	1º ano 3º ano	Aritmética	Razões, Progressões, Juros simples.	Equações Exponenciais.
1898	1º ano	Aritmética	Progressões, Proporções e Frações decimais.	Regra de três e Juros simples.
1912	2º ano 3º ano	Aritmética	Razões, Progressões, Juros simples.	Regra de três e Juros simples.

1915	3º ano	Aritmética	Razões, Progressões, Juros simples, estudo das Tábuas.	Regra de três e Juros simples.
1926	1º ano 2º ano	Aritmética	Proporções, Raízes, Potenciação, Progressões, Regra de três.	Equações Exponenciais e Juros compostos.
1929	3º ano	Álgebra	Progressões, Equações Exponenciais.	Equações Exponenciais, Juros compostos, Análise combinatória, Binômio de Newton.
1931	1º ano 2º ano 3º ano	Álgebra	Noção de expoente, Potência, Raiz.	_______________
1942	2º ano	Aritmética e Álgebra	Progressões, Função Exponencial.	Uso das tábuas, Equações Exponenciais.
1951	2º ano 3º ano	Aritmética	Potências, Raízes, Expressões Irracionais, Proporções, Razões, Progressões.	_______________

SEGUNDO PERÍODO: entre a Reforma Francisco Campos (1931) até o Movimento da Matemática Moderna (início da década de 60 do século XX)

Programa de Ensino para o ano de 1931:

Basicamente divide-se em tópicos de acordo com o ano em que o aluno se encontra. Todos constam uma carga horária de 3 horas e subdividem a matemática em 3 tópicos: aritmética, álgebra e geometria, esta última exceto na primeira e segunda séries onde consta como "iniciação geométrica". O interessante é que o tema logaritmos é apresentado na quinta série (o que seria o primeiro ano do ensino médio atualmente) apenas com os seguintes dizeres: "Resolução de triângulos retângulos, prática das tábuas de logaritmos". Isso porque o programa de ensino da quinta série inter-relaciona a aritmética, a álgebra e a geometria. Acho válido mostrar que noções de limite e derivada que atualmente são dados no primeiro ano de faculdade fazem parte da grade curricular da quinta série também.

Programa de Ensino para o ano de 1942:

Para esse ano, o programa divide-se da primeira à quarta série. Nos dois primeiros anos a disciplina é subdividida em geometria intuitiva e aritmética prática e nos dois anos seguintes é subdividida em álgebra e geometria dedutiva. O tema logaritmo parece ser deixado de lado devido à necessidade da profissionalização do mercado na época, com a criação de cursos técnicos.

O programa de matemática para o curso clássico subdivide-se em três séries do seguinte modo:

Primeira série: aritmética teórica, álgebra e geometria.
Segunda série: álgebra, geometria e trigonometria.
Terceira série: álgebra, geometria e geometria analítica.

O tema logaritmos aparece no conteúdo de álgebra da segunda série tendo como antecedente o estudo das progressões aritméticas e geométricas.

O mesmo ocorre com o programa de matemática do curso científico, somente há o acréscimo do uso das tábuas e aplicações.

Programa de Ensino para o ano de 1951:

Nesse ano o curso de matemática é dividido em curso ginasial, da primeira à quarta série e colegial, da primeira à terceira série. Não há subdivisões e constam breves tópicos de cada assunto, no máximo cinco para cada série. O tópico de logaritmos está na primeira série do curso colegial.

TERCEIRO PERÍODO: entre o Movimento da Matemática Moderna (início da Década de 60 do século 20) e o surgimento da Proposta Curricular para o Ensino Médio da CENP (1991).

No terceiro período (Início da Década de 60 até 1991), devido a diversas questões políticas, o Ensino Médio é subdividido em 3 setores, os quais eram referentes aos três setores econômicos do país, agricultura, indústria e serviços. Sendo que os estudantes saiam do Ensino Médio com um diploma de "Técnico" também.

Nos três setores, os Logaritmos eram introduzidos no 3º ano, depois de terem visto Geometria Analítica, e antes de Estatística e Cálculo Básico. Aqui, diferentemente do 1º e 2º períodos, os Logaritmos não vêm mais como um tópico chamado LOGARITMOS, mas sim como "Funções Logarítmicas e Exponenciais".

Além disso, nos períodos anteriores, os Logaritmos vinham logo depois de Sequências e Progressões, o que não acontece mais. Sequências e Progressões é dado no 1º ano, e depois só no 3º ano é que os alunos vêem Funções Logarítmicas e Exponenciais. Ou seja, a relação entre PA's e PG's desaparece por completo, deixando Logaritmos como um tema isolado do resto das matérias.

A proposta também sugere o número de aulas semanais e a quantidade de semanas que cada tema deveria ser tratado.

QUARTO PERÍODO: entre o surgimento da Proposta Curricular para o Ensino Médio da CENP (1991) e os dias atuais

No livro PCEM (Proposta Curricular para o Ensino Médio) logo na página 15 encontra-se um quadro "Opção de distribuição de conteúdo para escolas com 2 ou 3 aulas [de matemática] semanais ao longo das três séries do 2º grau". Os logaritmos não são explicitados. Mais a frente descobre-se que os logaritmos são abordados junto com o conteúdo potências e expoentes, ou seja, na terceira e última etapa do 1º ano do 2º grau. Em seguida é colocado um segundo quadro, que contempla escolas com 4 a 5 aulas semanais de matemática. Lá os logaritmos também não são explicitados, e a parte de potências e expoentes, na qual eles são abordados, estão ainda como terceiro, mas agora penúltimo, tópico geral a ser abordado no 1º ano do 2º grau.

O tema de logaritmos se desenvolve no capítulo 7.5 Potências e expoentes (pág 205), mais especificamente, a partir da página 261, onde há uma introdução histórica do logaritmo. O livro menciona que "A descoberta desse mecanismo teve início em 1590 e foi feita por John Napier". (p. 261). No desenvolver da parte histórica há uma ênfase no fato de no início do desenvolvimento construiu-se muitas tábuas de logaritmos.

Primeiramente ele constrói os cálculos com a calculadora e pede para o professor motivar os alunos a criar gráficos exponenciais na escala decimal. Um detalhe é que o gráfico apresentado não exibe nenhum valor de 10^x que seja igual aos valores dados no problema que motiva a exploração do conteúdo.

Há dois tipos de resolução de um único exercício e a exploração das propriedades do logaritmo.

Nesta proposta, os logaritmos aparecem junto com Potências e expoentes (pág. 205) não exatamente como um capítulo à parte, e sim como uma "ferramenta" para facilitar o cálculo de expoentes.

O livro dá a entender que o professor deve "construir" o conhecimento com os alunos, num tom: "a resolução da equação exponencial não é tarefa fácil, devemos utilizar de uma outra ferramenta para atacar o problema pode ser útil e podem existir outros problemas que possam ser resolvidos com esta ferramenta".

Análise dos Livros Didáticos

1.PRIMEIRO PERÍODO: entre a proclamação da República (1889) e a Reforma Francisco Campos (1931).

1.1 PEREZ Y MARIN, Andre. Arithemetica Theórico-Prática, 1909.

Neste livro Logaritmos são apresentados no capítulo IV THEORIA DOS LOGARITMOS – página 318. Juros Compostos e Anuidades". As matérias anteriores aos estudos dos logaritmos são: Razões e Proporções, Regras de três e outras que dela se derivam, Razões por diferença e quociente, Juros, Porcentagem. As matérias posteriores aos estudos dos logaritmos são: Juros compostos, Anuidades, Questões de capitalização, Questões de amortização.

É interessante notar o enfoque prático dado no livro com respeito às práticas financeiras como quando o autor define questões de câmbio direto e indireto, fundos públicos e ações de Companhias, Rendas Vitalícias.
O livro não é muito atraente do ponto de vista estético. Não contém figuras explicativas, gráficos ou outros elementos visuais que possam auxiliar na aprendizagem do tema, apesar de apresentar algumas tabelas como nas tábuas.

O autor procura dar as definições dos objetos matemáticos em estudo, descrevendo os teoremas, corolários e logo em seguida há um exemplo de aplicação do tópico ensinado em exercícios de fixação. O número de exercícios propostos é pequeno e não há uma lista das respostas dos exercícios propostos.

A definição de logaritmo é dada utilizando-se Progressões Aritméticas. Não há menção a propriedade de mudança de base e os capítulos têm raríssimos exemplos. Os exercícios propostos neste capítulo são mecânicos (aplicação direta das fórmulas e propriedades) e também pedem a utilização das Tábuas de logaritmos. Não há menção a histórica a origem dos logaritmos.

Aplicações práticas para o tema aparecem no capítulo V JUROS COMPOSTOS E ANUIDADES. Neste capítulo logaritmo é utilizado para cálculo de juros compostos, anuidades, amortizações.

Logaritmo: "Logarithmo de um número é o termo de uma progressão por diferença correspondente a esse número numa progressão por quociente, quando os termos zero e 1 se correspondem nas duas progressões".
Anuidade: "é a quantia que se coloca cada ano, durante um tempo determinado, para formar um capital ou amortizar uma dívida".

1.2 SERRASQUEIRO, José Adelino. Tratado Elementar de Arithmetica. Coimbra: Livraria central de J. Diogo Pires, 22ª edição, 1927.

Neste livro Logaritmos são apresentados no LIVRO QUINTO – Capítulo III. As matérias anteriores aos estudos dos logaritmos são: Razões, Proporções, Progressões. As matérias posteriores aos estudos dos logaritmos são: Grandezas Proporcionais, Regras de três.

Livro totalmente descritivo, não há figuras, tabelas ou quaisquer elementos gráficos que possam auxiliar o aprendizado do tema. A publicação não é atrativa quanto à estética. O autor descreve as Tábuas de Logaritmos dando alguns exemplos de aplicação, mas não as apresenta no livro.

O número de exemplos é muito pequeno nos capítulos como o número de exercícios propostos para fixação, sendo que a maior parte dos exercícios é mecânico dando ênfase apenas a aplicação das fórmulas. Não há uma lista de respostas dos exercícios do livro para auxílio ao aluno.

Novamente neste livro vemos algumas aplicações práticas do tema no LIVRO SEXTO – Capítulo II onde o autor trata dos tópicos Juros, Regra de compra e venda de fundos públicos, ações de bancos e companhias.

Não há nenhuma citação histórica da origem dos logaritmos e como se deu seu desenvolvimento ao longo das práticas sociais da época. Nota-se que o autor não dava muita relevância a questão histórica e sua importância no entendimento do tema, apresentando-o diretamente como mais uma ferramenta matemática para cálculos.

Logaritmo: "Logarithmos são os termos de uma progressão arithmetica começando por zero, correspondentes aos termos de uma progressão geométrica começando pela unidade".

1.3 VIANNA, João José Luiz. *Elementos de Arithmetica*. Rio de Janeiro: Livraria clássica Francisco Alves, sexta edição, 1897.

O livro apresenta fonte adequada para uma boa visualização, não possui nenhum design chamativo, embora apresente algumas figuras e tabelas.
Com relação ao tema, o autor busca trabalhar o conceito de acordo com sua definição original, baseada nas progressões por diferença e quociente, embora não haja menção histórica a respeito.

A ordem utilizada pelo autor para apresentar o tema, foi a seguinte: Regras de Exponenciação, Progressões e por fim Logaritmos.
Tratando-se do tema foram abordados os tópicos: Teoria Elementar dos Logaritmos, Aritmética, Propriedades Gerais do Logaritmo, Logaritmo das Frações, Tábuas de Logaritmos, Aplicação dos Logaritmos, Complementos Logaritmos, Regra de Juros Compostos. A ordem parece adequada, pois cada tópico seria um pré-requisito para os tópicos seguintes.

O tema é bem explorado e as propriedades mencionadas são delicadamente demonstradas (somente de forma algébrica), enfatizando certo critério pedagógico. A propriedade de mudança de bases não é mencionada.

O autor estabelece uma conexão entre Logaritmos e Juros compostos, usando propriedades Logarítmicas para resolver problemas de Juros compostos.

No livro não aparecem conexões com outras áreas do conhecimento e também, não aparece nenhuma informação relativa à história da matemática.
O livro não apresenta nenhum erro conceitual de exercícios ou problema para o aluno desenvolver, também não traz muitos exercícios resolvidos para o melhor desenvolvimento dos alunos.

Nenhum tipo de recurso visual como tais como gráficos, tabelas ou figuras, foram utilizados pelo autor para o melhor aprendizado e entendimento do tema.
As matérias que antecedem o tema Logaritmos são as Progressões por diferença, Progressões por quociente e as matérias que sucedem o tema são Juros compostos, Regra de Capitalização e Regra de Anuidades.

Logaritmo: “Logarithmos são números em progressão por differenças, correspondendo termo a termo a outros números em progressão por quocientes; havendo sempre na progressão por differenças um termo zero, que corresponda a um termo igual a um na progressão por quocientes".

2. SEGUNDO PERÍODO: entre a Reforma Francisco Campos (1931) até o Movimento da Matemática Moderna (início da década de 60 do século XX)

2.1 QUINTELA, Ary. Matemática 1º ano colegial. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959, 7ª. Edição.

Este livro foi feito baseado nos novos programas conforme portarias nº 966 de 2 de Novembro de 1951 e 1045 de 14 de Dezembro de 1951. O autor é um professor catedrático do colégio militar. Possui 650 exercícios e questões propostas nos concursos de habilitação das escolas de Engenharia, etc.

Possui também uma tábua de logaritmos com 4 casas decimais. Está dividido em unidades, sendo a parte de logaritmos tratada juntamente com a parte de equações exponenciais na unidade III. Esta unidade é precedida da unidade que trata de progressões (aritméticas e geométricas). A unidade II é subdividida em três partes. Na primeira parte é ensinado o conceito e propriedades gerais dos logaritmos. Logo em seguida há 36 exercícios sem respostas para correção. A segunda parte trata somente de logaritmos decimais (base 10), com os seguintes subitens:

- Propriedades
- Logaritmo preparado
- Regra para achar cologaritmo
- Operações com logaritmos
- Tábuas de logaritmos
- Achar logaritmo de um número através da tábua
- Achar antilogaritmo de um número através da tábua
- Cálculo de expressões
- Mudança de base

E por último seguem 90 exercícios que também não possuem respostas pára conferência. A ordem em que estão dispostos os tópicos dentro do tema não apresenta uma ordem lógica que seja extremamente necessária. Conexões dentro do tema, sejam elas entre outros temas afins da matemática ou temas de outras áreas são pouco explorados.Logo após o livro trata somente de geometria.

2.2 BEZERRA, Manoel Jairo. Curso de Matemática para os primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico. São Paulo: Cia Editora Nacional, 18ª edição, 1966.

Esta edição possui conteúdo do 1º, 2º e 3º anos contidos em 616 páginas. É divido em aritmética e álgebra para os 3 anos, geometria para o 1º ano, trigonometria para o 2º ano e geometria analítica para o 3º ano. O tema logaritmos é precedido de progressões, todos contidos na parte de álgebra do 1º ano. Dentro do tema ele apresenta os sistemas de Logaritmos, decimais e neperiano, mas preocupa-se em aprofundar-se no sistema decimal, alegando que este é mais usual na matemática elementar. O autor preocupa-se apenas em mostrar as propriedades e exemplifica-las, nos demonstrando como chegamos até elas.

Quanto a conexões com outros temas, sejam eles matemáticos ou de outras áreas não é visto neste livro, Logaritmo mais uma vez é tratado como um tema à parte da matemática onde é necessário apenas a compreensão de suas propriedades.

2.3 **ROXO, Euclides; PEIXOTO, Roberto; CUNHA, Haroldo; NETTO, Dacorso. Matemática 2º Ciclo – 1ª. série. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 7ª. edição, 1953.**

Este livro foi escrito com a portaria ministerial nº 1054 de 14 de Dezembro de 1951. Um dos autores era professor do colégio Pedro II e o outro do Instituto de Educação. Esta dividido em 2 grades partes: na primeira, álgebra e aritmética e na segunda, geometria. A primeira parte é subdividida em:

I- noções sobre cálculo numérico: erros
II- progressões
III- logaritmos

Na parte de logaritmos são dados exemplos numéricos e é subdivido em:

- Cálculo do logaritmo como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos; mudança de base. Característica e mantissa. Cologaritmo.
- Logaritmos decimais: propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico.
- Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprego dos logaritmos.

Há uma seqüência de 50 exercícios com solução.

2.4 **ROXO, Euclides; THIRÉ, Cecil; MELLO E SOUZA. Curso de Mathematica, 4º ano. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 3ª. Edição, 1938.**

Diferentemente dos outros livros, o tema função exponencial vem antes do tema logaritmos. A linguagem é diferente dos demais como por exemplo, em logarithmos e systemas.
O capítulo VII – logarithmos é dividido muitos subitens sendo os principais: Interpolação gráfica, logaritmação (?), função logarítmica, sistema de logaritmos, cologaritmos, propriedades e alguns exercícios resolvidos.
Logo após essa primeira parte há um item que não aparece em nenhum dos livros anteriores: fórmulas calculáveis por meio de logaritmos.
As propriedades são demonstradas, mas de uma forma ruim, que faz com que não haja um pleno entendimento. Para cada propriedade há um exemplo muito simples que talvez faça com que o aluno tenha dificuldades nos conteúdos posteriores.
Há uma seqüência com 17 exercícios com respostas logo após os enunciados.
O capítulo VII trata somente dos logaritmos decimais e possui 29 exercícios sobre o assunto.
O capítulo IX trata das tábuas logarítmicas e ao final possui 20 exercícios

3. TERCEIRO PERÍODO: entre o Movimento da Matemática Moderna (início da Década de 60 do século 20) e o surgimento da Proposta Curricular para o Ensino Médio da CENP (1991)

LIVRO: 2º grau, matemática 1ª série.
AUTORES: Gelson Iezzi,
Osvaldo Dolce,
José Carlos Teixeira,
Nelson José Machado,
Márcio Cintra Goulart,
Luiz Roberto da Silveira Castro,
Antonio dos Santos Machado.

O livro é de 1975, com gráficos e tabelas em duas cores (Preto e Vermelho), aborda temas como Conjuntos; Números; Relações e Funções. Função de 1º grau; Função Quadrática; Função modular; Função Exponencial e Logarítmica e Funções Circulares.

Primeiramente, o livro apresenta as Funções Exponenciais, apresentando as propriedades de expoentes, mas não as demonstra. Em seguida aborda as Funções Logarítmicas, apresentando as propriedades, e demonstrando-as com as propriedades de Expoente, sem citar a relação com Progressão Aritmética e Progressão Geométrica.

Percebe-se também a mudança em relação à definição de logaritmos, agora sendo tratado apenas como:

O logaritmo de **a** na base **b** é igual a **c**, se, e somente se, $b^c = a$.
Ou seja, $\log_b a = c \iff b^c = a$.

O livro faz uma análise gráfica bastante rigorosa, falando de Função Inversa, Função Crescente, Função Decrescente, Domínio e Imagem.

Além disso, o livro trás exercícios de fixação logo depois de cada subtema, exercícios mecânicos e só no final do livro, ele trás as possíveis aplicações de logaritmos, usando Cálculo Numérico, Atividades Financeiras, e daí surge também o uso de tabelas logarítmicas, logaritmos com números decimais, cologaritmos, mantissa, mas não sugere nenhuma atividade com o uso de calculadoras.

Estuda-se além das propriedades de Logaritmos, Equações Logarítmicas e Inequações Logarítmicas. A história da matemática não é apresentada em nenhum momento.

O livro, diferente dos livros dos períodos anteriores apresenta respostas dos exercícios sugeridos. Mas assim como na proposta curricular, o Capítulo de Funções Logarítmicas e Exponenciais, nada possuem ligações com os Capítulos anteriores e nem com os Capítulos posteriores.

LIVRO: Matemática, 2º grau, 1ª série.
AUTOR: Sílvio Andraus;
Udmyr Pires dos Santos.

O livro é de 1977, não é colorido, destaca os pontos principais em Negrito, tabelas em cinza. Apresenta poucas figuras, colocando apenas as imagens dos Gráficos.

Também dedica um Capítulo para Funções Exponenciais e um Capítulo para as Funções Logarítmicas, apresentando as propriedades de exponenciais e utilizando-as para as demonstrações das propriedades de Logaritmos.

Novamente há o estudo de gráficos como um fator bastante rigoroso.

Como aplicação utiliza-se apenas do Cálculo Numérico, onde é apresentado também a Tábua Logarítmica.

A única relação que se encontra com os Logaritmos é com a Função Exponencial, longe de ser comparado com as Progressões Aritméticas e Geométricas.

Os exercícios também são mecânicos, técnicos, sem aplicações, com respostas no final do livro.

Os Capítulos anteriores tratam de Plano Cartesiano, Funções, a Função Polinômio de 1º grau, a Função Polinômio de 2º grau e as Funções Circulares.

4. QUARTO PERÍODO: entre o surgimento da Proposta Curricular para o Ensino Médio da CENP (1991) e os dias atuais

4.1. MARCONDES dos Santos, Carlos Alberto; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio; Matemática. Série Novo Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Editora Ática, 6ª. edição, 2000.

O livro faz uma pequena referência às tábuas de logaritmos pouco antes de iniciar os módulos sobre a matéria. Afirma que são ferramentas para resolução de equações exponenciais e que foram criadas por Napier e Briggs (sem dar a biografia de nenhum dos dois). Ele afirma que com o advento da calculadora, as tábuas tornaram-se obsoletas.
Os módulos são como comprimidos: a casa duas páginas aparece um módulo, independente da dificuldade dele. O texto de conteúdo é pequeno, as demonstrações são bem simples, há em seguida exercícios resolvidos e na seqüência, exercícios propostos.
A definição de logaritmo é a padrão:

Há uma aplicabilidade dos logaritmos que o livro mostra, que são os terremotos.

O layout é pobre, tem poucas cores e não é atrativo. A fonte, sem serifa, torna a leitura um pouco cansativa.
Os módulos próximos de logaritmos são:

- Revisão de exponenciação e radiciação
- Equação exponencial
- Função exponencial
- **Log: definição**
- **Log: conseqüências da definição**
- **Log: propriedades**
- **Log: mudança de base**
- **Log: função logarítmica**
- **Log: Equação logarítmica**
- **Log: Inequação logarítmica**
- Seqüências
- Progressão aritmética
- Progressão geométrica

4.2 DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto & aplicações. Volume 1. São Paulo: Editora Ática, 2000.

4º período

O livro possui alguns boxes ("Para refletir") que ora apresentam questões ora afirmações, como que dicas para o aluno.

Possui novamente a definição padrão de logaritmos, mas já não apresenta módulos, apresenta exemplos, exercícios resolvidos e exercícios propostos, mas a estrutura de pouco conteúdo e muitos exercícios permanece.

Ele tem quadros-resumo, elencando as principasi propriedades e definições de logaritmo.

Ele tem uma parte que trata de calculadora, mas é pequena. Ele apresenta leituras da Superinteressante e de Elon L. Lima.

O layout é mais leve, tem mais cores, é visualmente atrativo.

Os capítulos próximos de logaritmos são:

- Função quadrática
- Função modular
- Potências
- Função exponencial
- Log: definição
- Log: condição de existência
- Log: conseqüências da definição
- Log: propriedades
- Log: cologaritmo
- Log: função logarítmica
- Seqüências
- Progressão aritmética
- Progressão geométrica

Reflexões dos Alunos

Carlos Eduardo

Confesso que apesar de estar concluindo um curso de Licenciatura em Matemática, não possuo hoje, muito interesse em efetivamente trabalhar como professor de Matemática. Com os estudos realizados nas disciplinas da Faculdade de Educação e, mais uma vez confirmada pela disciplina EL442, vejo que os moldes da Educação Brasileira descendem dos programas americanos e infelizmente vem piorando com o passar do tempo. As alterações nos programas de ensino são incontáveis, quase sempre na tentativa de uma melhora na qualidade da educação do país, mas seu principal ator, o professor, na maioria das vezes fica a margem dessas mudanças, podendo fazer muito pouco para o desenvolvimento das propostas.

A educação pública, que já foi muito disputada e motivo de orgulho no passado, hoje é caótica: professores mal pagos, escolas sem infra-estrutura necessária para o aprendizado dos alunos, modelos de ensino que praticamente obrigam a aprovação de alunos para não acarretar um atraso no sistema, materiais didáticos teóricos sem conexão nenhuma com o mundo real, enfim uma série de problemas com os quais o professor deve lidar todos os dias. Entretanto, esses não são privilégios das escolas públicas brasileiras, também os vemos nas escolas particulares, onde a vida do professor é igualmente dura.

Mas, se olharmos por outro lado, esses são os desafios para o bom professor e é exatamente neste ponto que considero a disciplina EL442 muito enriquecedora, pois nos dá perspectivas diferentes para o ensino da matemática, nos possibilita uma atuação direta, participativa e reflexiva sobre o ensinar matemática.

Durante os trabalhos desenvolvidos em sala de aula fiquei motivado ao perceber a utilidade de conteúdos que até então, considerava apenas para o exame vestibular. É impressionante o crescimento no processo de aprendizagem quando o aluno passa de um mero receptor de idéias prontas para um participante ativo da construção do conhecimento. Perceber como desempenhar esse papel de intermediador entre aluno e o conhecimento foi para mim, o maior aprendizado nesta disciplina.

Depois de EL442 fiquei um pouco balançado com relação à profissão e cheio de idéias para tornar o ensino da matemática uma atividade prazerosa, enriquecedora, instigante e acredito ser essa a função dos futuros professores da área.

Guilherme G. Menezes

Creio que a idéia do curso de fundamentos da metodologia do ensino da matemática II é muito boa teoricamente, mas muito difícil de ser realizada na prática. Trabalhos investigativos centrados na história, levantar, analisar e problematizar não são tarefas fáceis e necessitam não só de um tempo maior, mas uma total dedicação do professor. Neste semestre estou tendo a oportunidade de cursar a disciplina de estágio e estou conseguindo ver na prática o que realmente ocorre dentro das salas de aulas. É lógico que muito do que aprendi não foi em vão: assuntos abordados em todas as disciplinadas cursadas por mim até agora foram extremamente relevantes dentro da sala de aula apesar de não serem aplicados na prática. Afinal de contas, como queremos um alto nível educacional se não cuidamos de nossos alunos? Muitos deles vão à escola simplesmente para não ficar em casa ou somente para comer. A realidade é muito mais triste do que se pensa e, por isso, não devemos somente lamentar e imaginar formas de contornar o problema, mas sim “colocar a mão na massa” para mudarmos essa situação. Enfim, mesmo promovendo reflexões (muito importantes, diga-se de passagens) acho que o curso de EL 442 é de grande importância para o futuro professor, mas juntamente com as outras disciplinas da Faculdade de Educação não o forma completamente para a realidade em que nos encontramos.

Márcia Nakamura

O curso de EL 442 (Fundamentos da Metodologia do Ensino da Matemática II) , iniciou com as memórias de cada um sobre o tema escolhido, o que já foi bastante interessante pelo fato de todos na sala terem a possibilidade de se apresentarem, fazer com que a turma se conhecesse um pouco melhor, uma vez que todos ali pareciam se conhecer bem pouco.

Logo depois foram feitas as questões orientadas. Muitas das questões que nós mesmos tínhamos puderam ser tratadas. O interessante foi ter a oportunidade de ouvir as experiências que cada um teve sobre cada tema abordado e poder com isso, responder algumas dúvidas (por mais que não fosse esse o objetivo da atividade) e ficar ainda mais curioso com outras questões que surgiram.

Em seguida vieram as atividades com questões as quais deveríamos responder e apresentá-las. Essa talvez tenha sido a parte mais legal, já que as questões que trabalhamos eram bastante interessantes. Elas envolviam questões históricas, as circunstâncias que surgiram para a necessidade de ampliar o conhecimento e "ampliar" a matemática da forma que conhecemos hoje, estudamos os objetos utilizados antigamente para cálculos e medições, vimos tabelas, e pudemos fazer ligações entre a matemática as quais nem imaginávamos.

Depois veio a análise das propostas curriculares e dos livros didáticos. Neles pudemos perceber a evolução do Ensino da Matemática, sejam evoluções boas ou ruins. No geral observamos que a Matemática deixou de ser algo aplicável para se tornar simplesmente algo calculável. E os livros deixaram de ter uma característica educacional, ou seja, algo para se transmitir conhecimento, para algo que supre as necessidades do Vestibular.

Analisando o Curso no geral, acredito que eu tenha aproveitado bastante do curso, me interessando por todas as atividades uma vez que consegui ver a possibilidade de poder aplicá-las futuramente. Foi um curso interessante, bem administrado, apesar do nosso curto tempo e que nos trouxe um pouco de coragem para tentar mudar o Ensino que está decaindo.

Fábio Fogliarini Brolesi

A disciplina fundamentos da metodologia do ensino da matemática II deu-me um embasamento teórico grande para tratar questões matemáticas com os alunos. Com este trabalho de logaritmos, matéria que é preocupação de grande parte dos alunos, pude ver meios de introduzir essa matéria de forma mais simples e de modo que os alunos, interagindo com ferramentas de cálculo (calculadora, tábua de logaritmos) vejam a importância da matéria para a matemática, e também para a vida, em meios práticos como som, música.

A problematização, embora tome um tempo grande, pode ser de grande importância para a matemática e para o futuro do aluno. Questionar o por quê das coisas e buscar meios de ampliar o conhecimento fará parte do cotidiando deles no futuro. Assim, creio que a disciplina ajudou a pensar um pouco mais nas responsabilidades de ser professor, nas possibilidades de buscar alternativas para o ensino na sala de aula, mesmo porque o que se refletirá na vida do estudante é também um pocuo do que ele conseguiu apreender na sala de aula, seja buscando meios de atacar algum problema, seja pesquisando sobre determinado assunto.

É certo que há dificuldades de se usar este método investigativo nas aulas, mas o esforço certemente é recompensador.